Calcul d'un flux de particules, émises par une source ponctuelle isotrope, à travers une surface plane et application à un radiamètre cylindrique

J. KERNEIS

(Manuscrit reçu le 27 septembre 2011, accepté le 30 janvier 2012)

RÉSUMÉ Cet article établit l'expression du flux de particules, émises dans le vide par une source ponctuelle à travers une surface plane. Cette équation est alors comparée aux résultats numériques obtenus par utilisation de symétries sur des exemples. Une application est proposée pour un détecteur cylindrique (surface non plane). Des compléments sont donnés en conclusion.

ABSTRACT Calculation of a particles flux, emitted by an isotropic point source through a plane surface and application to a cylindrical radiometer.

This article establishes the expression of particle flux, emitted in the vacuum by an isotropic point source through a plane surface. The equation is then compared with numerical results obtained in some examples by using symmetries. An application is proposed for a cylindrical detector (non-planar surface). Complements are given in conclusion.

Keywords: solid angle / particle flux / cylindrical radiometer

1. Introduction

Il est connu que pour une source ponctuelle isotrope d'émissivité Φ_0 , le flux Φ_1 traversant une surface quelconque S_1 sera donné par $\Phi_1 = \Phi_0 \Omega / 4\pi$ où Ω est l'angle solide décrivant la surface S_1 depuis la source. En pratique, le calcul de cet angle se fait par approximations ou intégrations numériques *via* l'outil informatique. Des résultats sont établis pour des cas particuliers (Gardner et Verghese, 1971 ; Green *et al.*, 1974). L'équation proposée dans cet article donne l'expression exacte de l'angle solide pour un cas très général, sous la forme d'une intégrale simple et donc calculable avec une précision appréciable sur une calculatrice de type baccalauréat scientifique. La démonstration est laissée en annexe. L'expression du flux se fait selon le paramétrage de la figure 1.

EIGSI La Rochelle, École d'ingénieurs en Génie des systèmes industriels, 26 rue de Vaux de Foletier, 17000 La Rochelle, France.
LASEM de Brest, Laboratoire d'analyses de surveillance et d'expertise de la Marine, 8 rue Portzmoguer, BP 12, 29240 Brest Armées, France.
UBP Clermont-Ferrand, 34 avenue Carnot, BP 185, 63006 Clermont-Ferrand Cedex, France.
email : jeremy.kerneis.11@eigsi.fr

Figure 1 – Géométrie décrivant le problème.
Geometry describing the problem.

Avec ce paramétrage, le flux Φ_s à travers la surface définie par $f(x)$ sur un intervalle $[a ; b]$ sera :

$$\Phi_s = \frac{\Phi_0}{4\pi} \int_a^b \frac{D \sin \beta}{(D^2 + 2Dx_1 \cos \beta + x_1^2)} \frac{|f(x_1)|}{\sqrt{D^2 + 2Dx_1 \cos \beta + x_1^2 + f(x_1)^2}} dx_1. \quad (1)$$

2. Exemples numériques de validation

Les exemples ci-dessous proposent des comparaisons des résultats fournis par l'intégrale, calculée par une calculatrice graphique type baccalauréat (munie d'une fonction « intégrale »), avec des résultats obtenus par prise en compte des symétries du problème. Les faibles écarts relevés ici sont davantage provoqués par le troncage sur les valeurs d'entrée de l'intégrale que par les approximations numériques de la calculatrice.

2.1. Calotte sphérique

Soit un cône dont le sommet correspond à une source, et décrivant alors un cercle de rayon R sur un écran vertical (Fig. 2). Avec $\theta = 35^\circ$ nous obtenons sur l'écran

Figure 2 – Angle solide décrivant une surface circulaire.
Solid angle describing a circular surface.

vertical un cercle de rayon $R = D \tan \theta \approx 7,002075382$. L'angle solide est connu (aire d'une calotte sphérique) : $\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta) \approx 1,136301218$. Connaissant R , D , $\beta (= \pi/2)$, on déduit $f(x)$:

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \quad (2)$$

puis l'intégrale permet de calculer :

$$\Omega = 4 \int_0^{7,002075382} \frac{10}{10^2 + x^2} \frac{\sqrt{7,002075382^2 - x^2}}{\sqrt{10^2 + x^2 + 7,002075382^2 - x^2}} dx \approx 1,136301232 \quad (3)$$

soit une équivalence à plus de 99,99999 %.

Note : le facteur 4 vient du fait que notre intégrale n'est calculée, les bornes ainsi définies, que pour 1/4 du plan (nous aurions aussi pu calculer l'intégrale sur x variant $-R$ à R et multiplier le résultat par 2 au lieu de 4).

2.2. Face d'un cube

Soit un cube de côté $a = 20$, et la source placée en son centre. Les symétries du problème impliquent immédiatement un angle solide $\Omega = 4\pi/6 \approx 2,094395102$ pour chaque face. Si nous voulons retrouver ce résultat, l'intégrale permet de calculer l'angle solide correspondant à la surface hachurée représentée sur la figure 3.

Figure 3 – Angle solide décrivant une surface carrée.
Solid angle describing a squared surface.

Avec le point c comme origine d'un repère (c ; x, f(x)), nous avons $D = f(x) = 10$, $\beta = \pi/2$ et l'intégrale pour une face (2 fois la surface hachurée) s'écrit :

$$\Omega = 2 \int_{-10}^{10} \frac{10}{10^2 + x^2} \frac{10}{\sqrt{10^2 + x^2 + 10^2}} dx \approx 2,094395102 \quad (4)$$

soit une équivalence à 100 % sur les décimales fournies.

Il était aussi possible de prendre comme référence le point e et d'avoir $f(x) = 10$, $D = 10\sqrt{2}$, $\beta = 3\pi/4$, ce qui aurait donné :

$$\Omega = 2 \int_0^{20} \frac{10\sqrt{2} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\left(10\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(10\sqrt{2}\right)x \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + x^2} \frac{10}{\sqrt{10^2 + 2\left(10\sqrt{2}\right)x \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + x^2 + 10^2}} dx$$

$$\Omega \approx 2,094395102. \quad (5)$$

Il était encore, par exemple, possible de prendre comme référence le point h et d'avoir $f(x) = 10$, $D = 10\sqrt{2}$, $\beta = \pi/4$, soit :

$$\Omega = 2 \int_{-20}^0 \frac{10\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\left(10\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(10\sqrt{2}\right)x \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + x^2} \frac{10}{\sqrt{10^2 + 2\left(10\sqrt{2}\right)x \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + x^2 + 10^2}} dx$$

$$\Omega \approx 2,094395102. \quad (6)$$

Les résultats sont parfaitement semblables.

2.3. Tétraèdre régulier

Soit un tétraèdre régulier de côté 10 (Fig. 4), la source à nouveau en son centre. Les symétries donnent à nouveau l'angle solide pour une face, $\Omega = \pi \approx 3,141592654$.

Figure 4 – Angle solide décrivant une surface triangulaire.
Solid angle describing a triangular surface.

Pour nous, cela se ramène au problème qui serait de calculer l'angle solide permettant d'obtenir une face triangulaire allant de A à E sur un plan incliné d'un angle β (c'est-à-dire deux fois le triangle AEB de la Fig. 4 à droite). Après quelques calculs géométriques, nous avons, à 5 chiffres significatifs : $D = [OE] \approx 3,5356$, $\beta \approx 2,5261$ et $f(x) \approx 5 - 0,5773x$ pour $x \in [0 ; 8,6602]$ d'où l'angle solide :

$$\Omega = 2 \int_0^{8,66} \frac{3,53 \sin 2,56}{3,53^2 + 2 \times 3,53x \cos 2,52} \frac{5 - 0,577x}{\sqrt{3,53^2 + 2 \times 3,53x \cos 2,52 + x^2 + (5 - 0,57x)^2}} dx$$

$$\Omega \approx 3,141607739. \quad (7)$$

L'équivalence est cette fois d'un peu plus de 99,999 % pour un calcul effectué avec les chiffres significatifs de l'énoncé.

Note : prendre plus de décimales n'entraîne pas nécessairement, dans le cas présent, une plus grande précision du résultat : les paramètres β et D , que l'on place dans l'intégrale, sont eux-mêmes soumis à des variations de l'ordre du centième de pourcent selon le nombre et l'ordre des opérations qui permettent de déterminer leur valeur. En fait l'imprécision est plus grande sur le calcul des paramètres β et D que sur le résultat obtenu une fois ceux-ci choisis.

2.4. Plan infini

Nous savons que si nous plaçons un plan à une distance $D = 10$, et que si les dimensions de ce plan tendent vers l'infini, alors l'angle solide correspond à tout le demi-espace dans la direction du plan, soit 2π . Pour nous, cela correspond à calculer :

$$\Omega = \lim_{k \rightarrow \infty} 4 \int_0^k \frac{10}{10 + x^2} \frac{k}{\sqrt{10^2 + x^2 + k^2}} dx. \quad (8)$$

Il est possible d'observer, en Figure 5, la façon dont l'angle solide tend vers 2π .

Figure 5 – Convergence de l'angle solide décrivant un plan infini.
Convergence of the solid angle describing an infinite plane.

3. Application à un radiamètre cylindrique

La problématique ayant justifié d'établir l'équation est la suivante : lors d'un procédé d'étalonnage, on place une source discoïdale face à un radiamètre cylindrique. On souhaite estimer le changement du flux de particules traversant le détecteur pour une variation de la distance source/détecteur le long de l'axe $\vec{x}$, (Fig. 6). Pour cela on peut évaluer la variation du flux provenant de différents points de la source. On peut alors retenir comme changement le résultat le plus pénalisant, ou effectuer un calcul plus élaboré selon la précision souhaitée. Notons que dans cette analyse les phénomènes d'absorption et d'autoabsorption ainsi que la présence de la carte électronique sont négligés.

Figure 6 – Source radioactive et radiamètre cylindrique.
Radioactive source and cylindrical radiometer.

Le calcul de l'angle solide pour le point au centre de la source est aisé (il correspond à la calotte sphérique vue en Sect. 2.1 précédemment). Pour un point en dehors de l'axe $\vec{x}$, comme le point A, la surface visible du détecteur correspond à la figure 7a. Le calcul de l'angle solide peut se ramener à sommer les angles solides correspondant aux surfaces planes de la figure 7b. La somme des trois angles solides Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 des figures 7d-7f, chacun aisément calculable par l'intégrale, correspond à l'angle solide décrivant le détecteur depuis le point A.

Figure 7 – Radiamètre, vu depuis le point A, comme la somme de 3 angles solide.
Radiometer, seen from point A, as the sum of 3 solid angles.

Le calcul de l'angle solide décrivant le détecteur s'effectue à partir de la figure 8.

Figure 8 – Calcul des 3 angles solides.
Calculation of the 3 solid angles.

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 &= 2 \int_0^R \frac{D_1 \sin \beta_1}{(D_1^2 + 2D_1x \cos \beta_1 + x^2)} \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{D_1^2 + 2D_1x \cos \beta_1 + R^2}} dx \\
 \Omega_2 &= 2 \int_0^L \frac{D_1 \sin \beta_2}{(D_1^2 + 2D_1x \cos \beta_2 + x^2)} \frac{R}{\sqrt{D_1^2 + 2D_1x \cos \beta_2 + x^2 + R^2}} dx \\
 \Omega_3 &= 2 \int_0^R \frac{D_3 \sin \beta_3}{(D_3^2 + 2D_3x \cos \beta_3 + x^2)} \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{D_3^2 + 2D_3x \cos \beta_3 + R^2}} dx \\
 \Omega_{\text{radiomètre}} &= \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3.
 \end{aligned} \tag{9}$$

L'application pratique de cette méthode avait pour objectif d'évaluer l'incertitude relative associée au rendement du détecteur u_η / η , cette variable étant donnée par l'expression :

$$\eta = \frac{N_{net}}{\Phi_s t} \quad (10)$$

où :

- $N_{net} = N_{brut} - N_{bdf}$: différence des comptages associés à la source et au bruit de fond [-],
- t : temps de comptage [s],
- Φ_s : flux de particules traversant la surface du détecteur [s^{-1}].

L'incertitude (non élargie) sur le rendement s'écrivait alors,

$$\frac{u_\eta^2}{\eta^2} = \frac{u_{N_{brut}}^2}{(N_{brut} - N_{bdf})^2} + \frac{u_{N_{bdf}}^2}{(N_{brut} - N_{bdf})^2} + \frac{u_{\Phi_s}^2}{\Phi_s^2} + \frac{u_t^2}{t^2} \quad (11)$$

le dernier terme étant négligeable en pratique. La méthode pour déterminer l'incertitude sur Φ_s consistait à calculer l'angle solide pour différents points de la source et pour deux distances source/détecteur, celle-ci pouvant par hypothèse varier expérimentalement d'un millimètre par rapport à la valeur théorique (67 mm pour le cas décrit ici). Les résultats montrèrent qu'avec 1 mm de variation de la distance source/détecteur, l'angle solide évalué en différents points de la source variait, pour chacun d'entre eux, de moins de 3 %. C'est finalement cette valeur, associée à l'incertitude sur l'activité de la source, qui a servi à estimer l'incertitude sur le rendement du détecteur.

4. Conclusion

Cette équation permet de calculer des angles solides relativement aisément et avec une appréciable précision pour les besoins usuels. Bien qu'en pratique la source ne soit probablement pas située dans le vide, l'interaction du flux avec l'air peut, en première approximation, se modéliser par ajout d'un simple terme exponentiel (placé dans l'intégrale). Une réelle limite s'instaure dès lors que la source ne peut plus être considérée comme ponctuelle. Il serait, dans ce cas, possible de décomposer celle-ci en une somme (au sens intégral) de sources ponctuelles, au prix d'une complexification mathématique et d'un retour à l'outil informatique pour effectuer les calculs.

Annexe

Proposition

Soit un espace euclidien tridimensionnel E_0 muni d'une source ponctuelle isotrope S_0 , ayant un taux d'émission $\Phi_0 [s^{-1}]$ et placée en O_0 . Soit un plan E_1 , $E_1 \subset E_0 \setminus O_0 \notin E_1$, muni d'un repère orthonormé $R_1(O_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1)$. Soit $S_1 \subset E_1$, la surface entre $(O; \vec{x}_1)$ et une courbe intégrable $f:]a; b[\subset (O; \vec{x}_1) \rightarrow \mathbb{R}, x_1 \rightarrow f(x_1)$. Si, et seulement si, $\exists R_0(O_1; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ orthonormé $\setminus \vec{x}_0 \in (O_0 O_1)$ et $\vec{y}_0 = \vec{y}_1$ alors le flux $\Phi_1 [s^{-1}]$, émis par S_0 et traversant S_1 , est :

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_0}{4\pi} \int_a^b \frac{D \sin \beta}{(D^2 + 2Dx_1 \cos \beta + x_1^2)} \frac{|f(x_1)|}{\sqrt{D^2 + 2Dx_1 \cos \beta + x_1^2 + f(x_1)^2}} dx_1 \quad (A1)$$

où $D = [O_0 O_1]$ est la distance entre les deux repères, et β est l'angle diédral, orienté de $(\vec{x}_0 O_0 \vec{y}_0)$ à E_2 dans le demi-espace $z_0 > 0$, β et O_0 étant de part et d'autre de E_2 .

Démonstration

Nous nommerons système de coordonnées pseudo-sphériques, le système de coordonnées (r, ϕ, θ) tel que :

$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} ; \phi = \arctan \frac{z_0}{x_0} ; \theta = \arcsin \left(\frac{y}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \right) \quad (A2)$$

$$\Leftrightarrow x_0 = r \cos \phi \cos \theta ; y_0 = r \sin \theta ; z_0 = r \sin \phi \cos \theta. \quad (A3)$$

Dans un tel référentiel l'angle solide doublement différentiel s'écrit :

$$d^2\Omega = d\Phi d|\sin\theta| \quad (A4)$$

En notant que $\Phi(x_0; y_0; z_0) = \Phi(x_0; z_0)$, l'angle solide $d^2\Omega$ de sommet S_0 , décrivant une surface infinitésimale $dy_1 dx_1$ de E_1 est :

$$d^2\Omega = d|\sin(\theta(x_0(x_1), y_0(y_1), z_0(x_1)))| d\phi(x_0(x_1), z_0(x_1)) \text{ car } \exists R_0 \Leftrightarrow y_1 = y_0$$

$$d^2\Omega = d|\sin(\theta(x_1, y_1))| d\phi(x_1)$$

$$d^2\Omega = d \sin(\theta(x_1, |y_1|)) d\phi(x_1) \text{ avec } |\sin(\theta(x_1, y_1))| = \frac{|y_1|}{\sqrt{D^2 + 2Dx_1 \cos \beta + x_1^2 + |y_1|^2}}. \quad (A5)$$

Si nous exprimons immédiatement $d\Phi$ en fonction de x_1 , nous obtenons :

$$\phi(x_1) = \tan^{-1} \left(\frac{x_1 \sin \beta}{D + x_1 \cos \beta} \right) \Leftrightarrow d\phi = \frac{D \sin \beta}{(D^2 + 2Dx_1 \cos \beta + x_1^2)} dx_1. \quad (\text{A6})$$

Si, enfin, nous calculons l'angle solide, nous avons :

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_a^b \int_0^{|f(x_1)|} d^2\Omega(x_1, |y_1|) \\ \Omega &= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} \left| \sin(\theta(x_1, |y_1|)) \right|_0^{|f(x_1)|} d\phi(x_1) \\ \Omega &= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} (\sin(\theta(x_1)) - 0) d\phi(x_1) \\ \Omega &= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} \sin(\theta(x_1)) d\phi(x_1) \\ \Omega &= \int_a^b \sin(\theta(x_1)) \frac{d\phi(x_1)}{dx_1} dx_1 \\ \Omega &= \int_a^b \frac{D \sin \beta}{(D^2 + 2Dx_1 \cos \beta + x_1^2)} \frac{|f(x_1)|}{\sqrt{D^2 + 2Dx_1 \cos \beta + x_1^2 + f(x_1)^2}} dx_1 \\ \text{avec } \Phi_1 &= \Phi_0 \Omega / 4\pi. \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

Remerciements. L'auteur remercie F. Pieuchot, V. Treguer-Herrou, D. Cure et G. Lopez des LASEM de Brest et Cherbourg.

RÉFÉRENCES

- Gardner R.P., Verghese K. (1971) On the solid angle subtended by a circular disc, *Nucl. Instrum. Meth.* **93** (1), 163-167.
- Green M.V., Aamodt R.L., Johnston G.S. (1974) The solid angle subtended by a solid, right, circular cylinder as seen from a point in space, *Nucl. Instrum. Meth.* **117** (2), 409-412.