UNE INSTALLATION LÉGÈRE ET MOBILE DE SPECTROMÉTRIE HUMAINE UTILISÉE POUR LA SURVEILLANCE DES SUJETS SUSPECTS DE CONTAMINATION INTERNE

(Manuscrit reçu le 3 mars 1971)

J. MACCARIO, R. PERLES, H. FROSSARD et A. GOLHEN *

RÉSUMÉ

On présente la réalisation et l'utilisation d'un spectromètre γ humain allégé, simplifié et mobile. Cet ensemble qui renonce à la protection d'une enceinte blindée, utilise une sonde collimatée, un fauteuil blindé et une électronique simplifiée.

Les résultats obtenus sur un échantillon de 137 individus sains permet de rejeter la pondération des comptages par le poids et la taille.

La distribution des comptages globaux donne une répartition gaussienne pour des sujets indemnes de contamination anormale.

On étudie quelle est la charge anormale, qui, appliquée à chaque sujet de la première population, donne une nouvelle gaussienne nettement séparée de la première.

En acceptant le risque de négliger des charges inférieures ou égales à 1/100 de QMA de radioéléments facilement accessibles à la spectrométrie gamma, il est possible de séparer avec une bonne certitude les contaminés des indemnes.

SUMMARY

We present here the realisation and practical application of a light, portable, simplified human γ spectrometer. This unit forgoes the use of heavy sheet-metal shielding, and replaces this with a collimated detector, a shielded chair and simplified electronics.

The results obtained in a sample of 137 healthy persons enable us to reject the influence of weight and height on the total counts.

The distribution of total counts gives a gaussian reading for subjects free of contamination.

It was studied what abnormal burden, applied to each subject of the primary population, gives a new gaussian reading, clearly distinguished from the first.

While accepting the risk of rejecting burden at less than or equal to 1/100 Maximum Permissible Body burden (of radioactive elements easily measurable with gamma spectrometer), it is possible to separate with a good measure of certainty those contaminated from the healthy persons.

(*) Division d'hygiène Atomique du Centre de Recherches du Service de Santé des Armées, 3, rue du Lieutenant-R. Batany, 92 - Clamart.

Les établissements des Armées, dispersés sur tout le territoire national, emploient un nombre sans cesse croissant de P.D.A. (Personnel Directement Affecté au travail sous radiations ionisantes). Ces personnels, qui encourent un risque de contamination interne, font l'objet de contrôle systématique en gamma-spectrométrie humaine.

Le contrôle de ces sujets au Laboratoire d'Hygiène Atomique du Centre de Recherches du Service de Santé des Armées à Clamart s'avère peu pratique sur le plan logistique. Aussi, depuis 1969, la Division a créé, en s'inspirant de travaux américains [1], une installation légère de spectrométrie humaine. La légèreté a été obtenue par l'abandon de la lourde enceinte blindée au profit d'un simple fauteuil blindé et d'une sonde 3×3 collimatée. L'électronique elle-même a été simplifiée : sélecteur d'amplitude 100 canaux SEIN (AFC 100 T) avec sortie série des résultats sur ADDO X [2] (fig. 1).

FIG. 1. — Fauteuil sonde et électronique de l'installation légère.

L'ensemble tient très bien dans le compartiment arrière d'une camionnette Super Goélette Renault. Il est ainsi possible d'aller effectuer sur les lieux de travail les examens demandés. Le rythme de ces examens est de 4 à l'heure (10 minutes d'examen, 3 minutes de sortie de résultats) (fig. 2).

Au cours de plusieurs missions de trois à quatre jours, il a été réalisé 700 examens depuis la création de l'ensemble mobile de spectrométrie humaine.

VALEUR DES RÉSULTATS OBTENUS

Une installation allégée et simplifiée ne saurait donner d'aussi bons résultats qu'une installation classique.

Sur le plan de la métrologie pure : bruit de fond 400 imp/mn.

L'efficacité de comptage est le dixième de celle de notre installation fixe, la sensibilité le tiers [3, 4].

Pour un mélange des radioéléments, (^{140}La : 150 μCi ; ^{137}Cs : 95 μCi ; ^{131}I : 137 μCi) qui donnent une gamme assez complète d'énergies γ de 300 à 1 600 keV, l'efficacité de comptage global des γ de 100 à 2 000 keV est de l'ordre de $1,8 \cdot 10^{-3}$.

Le spectre obtenu en 10 minutes, bruit de fond non déduit, permet de discerner chez l'homme normal le pic 1,48 MeV du ^{40}K , mais sa qualité est très inférieure à celle obtenue avec une installation plus classique.

FIG. 2. — La camionnette Renault équipée.

APPLICATION AU TRI DE CONTAMINATION INTERNE

Avec un instrument simplifié comme celui décrit, c'est le comptage global de l'activité γ du sujet qui sera considéré : le C P M (nombre de coups par minute).

Dans un premier temps, la durée de la mesure est fixée à 10 minutes; lors d'études ultérieures, nous envisagerons une éventuelle réduction de ce temps de comptage.

Notre étude se propose :

- de vérifier si le comptage global de l'individu — C P M (nombre de coups comptés par minute) — est directement représentatif ou s'il convient de pondérer ce C P M par un facteur de géométrie du sujet (poids, taille, épaisseur, etc.);

- dans un second temps, d'étudier la répartition des sujets indemnes de contamination anormale et de contrôler que son assimilation à une gaussienne est justifiée;

- enfin, dans un troisième temps, d'étudier quelle serait la répartition d'une population dont chaque membre aurait une contamination interne d'une quantité donnée, de voir à partir de quelle charge il est possible avec une certitude ($> 90\%$) de séparer nettement les deux populations (sujet indemne et sujet

contaminé); à partir de là, de chiffrer, en fraction de Q M A la charge qui permettrait d'affirmer la contamination par les émetteurs γ dont les photons ont une énergie supérieure à 100 keV, un rapport d'embranchement supérieur à 10 %, une période supérieure à une semaine et dont les Q.M.A. figurent à la C.I.P.R. (sensibilité de la méthode).

I - RECHERCHE D'UNE PONDÉRATION CONVENABLE DU CPM. RECHERCHE D'UNE CORRÉLATION ENTRE POIDS ET/OU LA TAILLE D'UNE PART ET LE CPM OU LES LOGARITHMES DE CES QUANTITÉS, D'AUTRE PART

— Corrélation totale entre x et y :

$$r(xy) = \frac{\text{cov}(xy)}{\sqrt{\text{Var}(x) \cdot \text{Var}(y)}}$$

— Corrélation partielle entre x et y selon z :

$$r(xy/z) = \frac{r(xy) - r(xz) \cdot r(yz)}{\sqrt{1 - r^2(xz)} \cdot \sqrt{1 - r^2(yz)}}$$

Echantillon

De l'ensemble des sujets non contaminés, contrôlés par l'installation de spectrométrie légère, 137 personnes contrôlées à Cherbourg en février 1970 ont été retenues comme échantillon pour cette étude.

Cet échantillon paraît homogène : sexe et âge, et donne une répartition des C P M qui semble gaussienne.

Cet échantillon est découpé en 6 lots pour faciliter les calculs. Le numéro d'examen est supposé être un tirage au hasard des individus.

Résultats

1) Les corrélations totales entre Poids — C P M d'une part et Taille — C P M d'autre part sont faites sur la totalité de l'échantillon.

$$r(\text{Poids} - \text{C P M}) = 0,0592$$

$$r(\text{Taille} - \text{C P M}) = -0,0287.$$

Ces valeurs font apparaître une très faible corrélation positive entre Poids et C P M et négative entre Taille et C P M. Les valeurs de r ne sont pas significativement différentes de zéro (avec une confiance de 90 %).

Ces variables ne sont pas nécessairement indépendantes, mais, si une relation les lie, elle n'est pas accessible à ce genre d'investigation.

2) Devant l'échec de cette première étude, la corrélation épaisseur (e) — C P M est évaluée [3]

$$e = \sqrt{\frac{\text{Poids (kg)}}{\text{Taille (m)}}}$$

$$r(e - \text{C P M}) = 0,0745$$

La corrélation est supérieure aux précédentes, mais pas significativement différente de zéro.

3) On teste ensuite l'hypothèse d'une corrélation entre la surface corporelle (S) et le CPM.

La surface corporelle est donnée par la formule de Dubois et Dubois.

$$\lg S = 0,425 \lg P + 0,725 \lg T + 1,8564 \quad (P \text{ en kg, } S \text{ en cm}^2, T \text{ en cm})$$

La corrélation est trouvée :

$$r(S - \text{CPM}) = 0,0445.$$

Pour la suite de l'étude, on se limite ensuite au premier lot (24 individus) afin de raccourcir les calculs.

4) On étudie successivement :

$r(\text{Poids} - \text{CPM})$	=	0,2851
$r(\text{Taille} - \text{CPM})$	=	0,1376
$r(\text{Poids} - \text{CPM/Taille})$	=	0,2538
$r(\text{Taille} - \text{CPM/Poids})$	=	-0,0306
$r(\text{Poids} - \lg \text{CPM})$	=	0,2936
$r(\text{Taille} - \lg \text{CPM})$	=	0,1369
$r(\text{Poids} - \lg \text{CPM/Taille})$	=	0,2647
$r(\text{Taille} - \lg \text{CPM/Poids})$	=	-0,0378
$r(e - \lg \text{CPM})$	=	0,2798
$r(S - \lg \text{CPM})$	=	0,2584
$r(\lg \text{Poids} - \lg \text{CPM})$	=	0,2974
$r(\lg \text{Taille} - \lg \text{CPM})$	=	0,1390
$r(\lg \text{Poids} - \lg \text{CPM}/\lg \text{Taille})$	=	0,2764

Aucun de ces coefficients n'est significativement différent de zéro (confiance = 90 %).

Un nombre restreint de relations statistiques possibles entre CPM et/ou poids-taille, a été étudié ici. Si une relation existe (compte tenu du nombre de sujets considérés et de l'intervalle de certitude recherché — 90 % —), l'un au moins des coefficients serait supérieur à 0,4 et ceci, quelle que soit la forme de la relation. Il faut en conclure que le CPM mesuré dans l'installation légère varie sans corrélation avec le poids et la taille et qu'une pondération des résultats par ces paramètres ne s'impose pas. La position de la sonde collimatée au contact de l'épigastre du sujet peut expliquer cela : le cristal voit dans chaque sujet un tronc de cône découpé dans l'organisme qui reste de dimensions pratiquement constantes quelle que soit la morphologie du sujet sous réserve que celui-ci soit un adulte. (fig. 3).

II - VÉRIFICATION DE LA NORMALITÉ DE LA DISTRIBUTION DES CPM

L'échantillon avait, quant au CPM, un aspect gaussien. La vérification de cette normalité est faite par la méthode de la droite de Henry. Les 123 valeurs distinctes du CPM pour 137 sujets conduisent à un coefficient de régression (r) entre les CPM et le probit de leur fréquence cumulée : $r = 0,978$.

Cette valeur de r indique un excellent accord de l'hypothèse de normalité avec les résultats expérimentaux.

FIG. 3. — Schéma de la sonde collimatée et section des sujets (échelle : 1/4)

Les paramètres de la droite de Henry sont :

$a = 0,068$ (pente),

$b = -3,60$ (ordonnée à l'origine).

Les paramètres de la distribution des CPM sont :

E (CPM) = 52,94 (espérance mathématique de la CPM)

σ (CPM) = 14,71 (écart-type de la CPM)

soit 27,8 % de la valeur moyenne.

En conséquence :

A) La distribution des CPM peut être assimilée à une gaussienne de moyenne ≈ 53 coups/mn et d'écart-type ≈ 15 coups/mn (27,8 % de $\bar{m}$).

B) Si l'on suppose tous les sujets d'une telle population contaminés d'une charge s'exprimant par un comptage k , « k » s'ajoute à leur CPM de sujet sain. « k » étant le même pour chaque sujet, on obtient une nouvelle population de distribution gaussienne qui admet pour moyenne $m_2 = m_1 + k$ et pour écart-type : $\sigma_2 = \sigma_1$.

III - ETUDE THÉORIQUE DE LA SÉPARATION DE DEUX POPULATIONS DE DISTRIBUTION NORMALE

Principe

soient deux populations :

P_1 ; moyenne m_1 ; écart-type σ_1

P_2 ; moyenne m_2 ; écart-type σ_2

avec : $m_1 < m_2$

et α , une valeur arbitraire de séparation.

Pour une valeur x expérimentale :

$x < \alpha$ on conclura $x \in P_1$

$x > \alpha$ on conclura $x \in P_2$

On a donc les matrices de décision :

	$x \in P_1$	$x \in P_2$
$x < \alpha$	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$
$x > \alpha$	$1 - \mathcal{P}_1$	$1 - \mathcal{P}_2$

ou $\mathcal{P}_1 = \text{Pr} (x < \alpha \mid x \in P_1)$

Le critère α peut être déterminé de deux façons selon que l'on a ou non une estimation du coût de chaque décision (cf. annexe).

Etude d'un cas particulier simplifié : Tri par ensemble mobile en comptage 10 mn.

La population P_1 a un CPM de population non contaminée avec $m_1 = 53$ et $\sigma_1 = 15$ comme nous l'avons déterminé précédemment sur l'échantillon de 137 cas.

Une population P_2 a une contamination K , la même pour chaque membre de la population.

Cette population admettra une moyenne $m_2 = m_1 + k$ et un $\sigma_2 = \sigma_1$ en première approximation.

Si l'on prend une contamination K qui, seule, est comptée 111 coups par minute, on a alors, en fonction de α le tableau des valeurs des risques de première (R_1) et de seconde (R_2) espèce

α	R_1	R_2
70	0,1825	—
80	0,0359	—
90	0,0068	—
100	0,0010	—
110	0,0001	0,0002
120		0,0017
130		0,0150
140		0,0548
150		0,1750

(Les valeurs non calculées sont inférieures à 0,0001).

Dans ce cas particulier, la valeur de séparation est à choisir aux environs de 110 coups/mn (fig. 4).

Fig. 4. — Distribution d'une population indemne et d'une population contaminée.

CONCLUSION

On peut séparer les deux populations grâce à la grande valeur de $(m_2 - m_1)$ par rapport à σ .

Une diminution du temps de comptage augmenterait σ ; la séparation entre les deux populations serait moins nette. Cependant une étude de la variation des σ pour des comptages inférieurs à 10 mn permettrait d'évaluer la pertinence de cette séparation pour des mesures de courte durée [4].

IV - APPLICATION

Nous avons retenu une contamination apportant une augmentation de comptage de 111 coups/mn, car cette valeur permettait de séparer nettement les deux populations.

Voyons maintenant à quoi correspond, dans la pratique, une telle augmentation de comptage. En se limitant aux émetteurs γ de plus de 10 % de rapport d'embranchement, de plus de 100 keV d'énergie, dont la période est supérieure à une semaine et dont les QMA-organisme entier figurent à la CIPR, en prenant le rendement global de comptage de l'installation égal à $1,8 \cdot 10^{-3}$ pour un émetteur produisant 100 γ pour 100 désintégrations, nous aurions une activité de 30 nanocuries environ :

(nombre de coups par minute, divisé par 60 pour ramener à la seconde, divisé par 37 pour obtenir des nanocuries, divisé par l'efficacité de comptage $1,8 \cdot 10^{-3}$.)

$$\frac{111}{60 \cdot 37} \cdot \frac{1}{1,8 \cdot 10^{-3}} = 27,77 \text{ nCi} \approx 30 \text{ nCi.}$$

Toute précision supérieure serait illusoire puisque l'efficacité de comptage n'est pas une constante absolue.

À partir de ce chiffre de 30 nanocuries d'un élément imaginaire, embranchement γ à 100 %, nous calculerons l'activité des différents radionucléides en tenant compte de leur rapport d'embranchement, puis nous indiquerons la fraction de 1/1 000 de QMA que cette activité représente (voir tableau I).

Le survol de ce tableau permet de voir que dans les conditions définies toute CPM < 110 permettra d'affirmer soit l'absence de contamination, soit la présence d'une contamination inférieure ou égale au 1/100 QMA, qui est de l'ordre de grandeur de la détection obtenue aux U.S.A. par ce genre de dispositif [5].

Ce CPM de 110 correspond à un indice approximativement égal à 2, si l'on définit l'indice comme le rapport CPM du sujet sur CPM moyen de la population indemne [4].

Tout sujet exempt de contamination externe, qui présentera un indice supérieur à 2, devra faire l'objet d'investigations approfondies : spectrométrie lourde et radiochimie des excréta.

En résumé, nous retiendrons les points suivants, qui semblent primordiaux dans le choix de la spectrométrie légère, pour des examens de surveillance ou pour un tri systématique à l'occasion d'un accident radiologique.

1) La simplicité de l'installation, sa facilité d'emploi, son prix de revient modique permettent d'envisager la multiplication de telles installations pour répondre à la demande sans cesse croissante d'examens des installations nucléaires dispersées.

TABLEAU I
FRACTION DE LA Q.M.A. DÉCELABLE EN SPECTROMÉTRIE MOBILE LÉGÈRE

Radio isotope	Période	% approximatif de photon γ par désintégration	Charge minimale décélable en nanoCi	Q M A organisme entier en μ Ci	Fraction de Q M A décélée en 1/1 000
Sodium $^{24}_{11}\text{Na}$	2,5 a	100	30	10	3
Chrome $^{51}_{24}\text{Cr}$	28 j	10	300	800	0,4
Vanadium $^{48}_{23}\text{V}$	16 j	200	15	10	1,5
Manganèse $^{54}_{25}\text{Mn}$	280 j	100	30	40	0,75
Fer $^{58}_{26}\text{Fe}$	45 j	100	30	20	1,5
Cobalt $^{57}_{27}\text{Co}$	270 j	200	15	200	0,07
Cobalt $^{60}_{27}\text{Co}$	5,2 a	200	15	10	1,5
Zinc $^{65}_{30}\text{Zn}$	245 j	50	60	60	1
Arsenic $^{73}_{33}\text{As}$	76 j	20	150	200	0,5
Rubidium $^{86}_{37}\text{Rb}$	18 j	10	300	30	10
Strontium $^{85}_{38}\text{Sr}$	64 j	100	30	50	0,6
Zirconium $^{90}_{40}\text{Zr}$	65 j	200	15	20	0,75
Niobium $^{95}_{41}\text{Nb}$	35 j	100	30	40	0,75
Technétium $^{97m}_{43}\text{Tc}$	90 j	100	30	20	1,5
Ruthénium $^{103}_{44}\text{Ru}$	40 j	100	30	50	0,6
Ruthénium $^{104}_{44}\text{Ru}$	1 a	32	100	10	10
Rhodium $^{106}_{46}\text{Rh}$	2 h*	31	100	100	1
Indium $^{114m}_{49}\text{In}$	50 j	104	30	20	1,5
Etain $^{113}_{50}\text{Sn}$	119 j	100	30	60	0,5
Antimoine $^{124}_{51}\text{Sb}$	60 j	144	21	10	2,1
Tellure $^{127m}_{52}\text{Te}$	105 j	100	30	60	0,5
Tellure $^{129m}_{52}\text{Te}$	33 j	100	30	20	1,5
Iode $^{131}_{53}\text{I}$	8 j	97	30	50	0,6
Césium $^{134}_{55}\text{Cs}$	2,2 a	204	14	20	0,7
Césium $^{137}_{55}\text{Cs}$	30 a	82	37	30	1,2
Baryum $^{140}_{56}\text{Ba}$	12 j	113	27	9	3
Lanthane $^{140}_{57}\text{La}$	40 h*	200	15	10	1,5
Cérium $^{141}_{58}\text{Ce}$	32 j	54	55	30	1,4
Cérium $^{144}_{58}\text{Ce}$	285 j	12	250	20	12,5
Mercure $^{203}_{80}\text{Hg}$	47 j	100	30	80	0,4
Bismuth $^{207}_{83}\text{Bi}$	8 a	190	18	20	1
Protactinium $^{233}_{91}\text{Pa}$	27 j	80	38	60	0,4

* En équilibre séculaire avec son prédécesseur.

— Cette liste non exhaustive de radio-isotopes cite les émetteurs γ de plus de 100 keV dont la période est supérieure à une semaine.

Son confort certain, en regard de l'exiguïté de certaines installations lourdes, permet d'exécuter des examens sans risque de claustrophobie.

Toute perte de temps inutile et de dépaysement est évitée puisque les contrôles peuvent s'effectuer sur les lieux de travail habituel.

2) La mesure pratiquée est une gammamétrie globale, permettant toutefois d'obtenir un spectre où le pic du potassium 40 est nettement discerné.

Des comptages globaux pour une population indemne de contamination anormale se répartissent d'une façon gaussienne, sans qu'il soit nécessaire de pondérer ceux-ci par un paramètre quelconque lié à la morphologie du sujet. Ce dispositif autorise, au prix d'un calcul mental simple, une décision immédiate.

3) Il est possible, dans le cas de suspicion de contamination par des radioéléments facilement accessibles à la spectrométrie gamma, de séparer les sujets contaminés de ceux indemnes. Le risque maximal de déclarer indemne un sujet porteur d'une contamination inférieure au 1/100 de QMA, est de 1 pour 10 000. Il faut cependant rester dans l'expectative pour les quelques émetteurs gamma à rapport d'embranchement faible et période très courte.

En conclusion, en regard des avantages pratiques et considérables que nous venons d'énumérer, le seul inconvénient de cette technique pourrait être sa limite de sensibilité. Il nous semble, avec notre expérience actuelle, qu'un seuil de réserve inférieur au 1/100 de QMA est suffisant. Une contamination de ce type, survenant en dehors de toute notion d'incident reconnu et lorsque le rythme des examens est correctement adapté aux risques encourus, correspond à une irradiation interne inférieure au seuil de détection réglementaire en dosimétrie externe (50 mrem).

En tout état de cause, la spectrométrie gamma classique associée à la radiochimie doit être mise en œuvre dès qu'une anomalie apparaît.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DERAY PARKER and JOSSE I. ANDERSON. A portable whole-body. *Health Physics*, 1967, 13, pp. 141-148.
- [2] FROSSARD H., ARNAUD D., ANDRIEU L., FABRE J. and DONGRADI G. Etude d'une installation légère de Spectrométrie gamma humaine. *Radioprotection*, 1968, 3, 4, pp. 311-318.
- [3] MARINELLI L.D. Geometrical and Physical parameters in whole-body gamma. Rapport Ray Spectrometry measurements. *A.N.L.* 7220, 1965.
- [4] FROSSARD H., ANDRIEU L., PERLES R., FABRE J. et FERNET P. Temps de comptage et indice de tri en Spectrométrie humaine. *Radioprotection*, 1969, 4, 3, pp. 217-229.
- [5] MASSE F.X. and BOLTON M.M. Jr. Experience with a low cost chair type detector system for the determination of radioactive body burdens of M.I.T. Radiation workers. *Health Physics*, 1970, 19, pp. 27-35.

ANNEXE

BUT

Etude théorique de la séparation de deux populations normales.

PRINCIPE

Soient deux populations normales :

$$P_1 = \text{moyenne } m_1 ; \text{ écart-type } \sigma_1$$

$$P_2 = \text{moyenne } m_2 ; \text{ écart-type } \sigma_2 \quad m_1 < m_2$$

et α , une valeur arbitraire de séparation, c'est-à-dire que si x est une valeur expérimentale :

$$x < \alpha, \text{ on en conclura } x \in P_1$$

$$x > \alpha, \text{ on en conclura } x \in P_2$$

On a donc la matrice des décisions

	$X \in P_1$	$X \in P_2$
$x < \alpha$	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$
$x > \alpha$	$1 - \mathcal{P}_1$	$1 - \mathcal{P}_2$

$$\text{où } \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_r (x < \alpha / x \in P_1)$$

Le critère α peut être déterminé de deux façons selon que l'on a ou non une estimation du coût de chaque décision.

Premier cas : pas d'estimation de coûts

On peut alors tout au plus estimer les risques de première et de seconde espèce.

Si on pose la question $x \in P_1$.

Risque de première espèce : conclure $x \in P_2$ alors que $x \in P_1$.

$$\text{i.e.} = x > \alpha / x \in P_1$$

Le risque est de : $1 - \mathcal{P}_1$.

Risque de deuxième espèce, conclure que $x \in P_1$ alors que $x \in P_2$

$$\text{i.e.} = x < \alpha / x \in P_2.$$

Le risque est de : $\mathcal{P}_2$.

La valeur du critère α est alors laissée à l'appréciation de l'expérimentateur en fonction des valeurs de ces deux risques.

Deuxième cas : une estimation des coûts est disponible.

On définit alors :

— une matrice des coûts, soit par exemple :

	$x \in P_1$	$x \in P_2$
$x < \alpha$	o	δ
$x > \alpha$	γ	o

Fonction de coûts (en réalité, espérance mathématique $E[C(\alpha)]$ pour une personne).

$$C(\alpha) = \gamma \cdot Pr(x > \alpha, x \in P_1) + \delta \cdot Pr(x < \alpha, x \in P_2)$$

$$= \gamma (1 - \mathcal{P}_1) + \delta \mathcal{P}_2$$

$$\frac{dC}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\gamma \mathcal{P}_1}{d\alpha} = \delta \frac{d\mathcal{P}_2}{d\alpha} \quad (1)$$

en posant :

$$\mathcal{P}_1(x < \alpha) = \int_0^{\alpha} f_1(x) dx$$

$$\mathcal{P}_2(x < \alpha) = \int_0^{\alpha} f_2(x) dx$$

(1) s'écrit

$$\gamma f_1(\alpha) = \delta f_2(\alpha)$$

avec :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{hypothèse de normalité de } x)$$

dans le cas où $\sigma_1 = \sigma_2$ (en passant aux log) ($\gamma, \delta > 0$)

$$\Rightarrow \log \gamma - \frac{(\alpha - m_1)^2}{2\sigma^2} = \log \delta - \frac{(\alpha - m_2)^2}{2\sigma^2}$$

$$\Rightarrow (\alpha - m_2)^2 - (\alpha - m_1)^2 = 2\sigma^2 \log \frac{\delta}{\gamma}$$

$$(m_1 - m_2) \left(\alpha - \frac{m_1 + m_2}{2} \right) = \sigma^2 \log \frac{\delta}{\gamma}$$

ou en explicitant α

$$\alpha_{\text{minimum}} = \frac{m_1 + m_2}{2} + \frac{\sigma^2}{m_1 - m_2} \log \frac{\delta}{\gamma}$$

$$\text{si } \delta = \gamma \Rightarrow \alpha_m = \frac{m_1 + m_2}{2}$$

cas considéré dans le texte.