CALCUL DE LA RÉPONSE DES SPHÈRES DE BRAMBLETT-BONNER AU MOYEN D'UNE THÉORIE MULTIGROUPE *

J. LAMBERIEUX**

INTRODUCTION

La réponse des sphères modératrices de BRAMBLETT-BONNER a été déterminée expérimentalement par ces deux auteurs entre 50 keV et 14 MeV ainsi qu'à l'énergie thermique où elle peut d'ailleurs être facilement calculée.

Le présent travail a pour objet le calcul de cette réponse entre l'énergie thermique et 50 keV, au moyen d'une théorie multigroupe.

Les paramètres de ralentissement seront éventuellement retouchés pour ajuster le modèle aussi exactement que possible sur la région de la surface-réponse connue expérimentalement.

Après quoi, nous admettons que le modèle représente aussi la région actuellement inconnue. Rappelons que la théorie du ralentissement continu de FERMI est inapplicable aux milieux hydrogénés donc, en particulier, aux sphères de BONNER.

La théorie générale du ralentissement discontinu est due à WEINBERG [1]. L'exposé que nous en ferons dans la première partie est beaucoup plus simple mais, évidemment, moins général.

A. — PARTIE THÉORIQUE

1. EQUATION DE LA DIFFUSION DES NEUTRONS A ÉNERGIE CONSTANTE

Nous supposons un milieu renfermant des sources distribuées qui émettent $S(x)$ neutrons thermiques par cm^3/s . Nous désignons par :

- $D(\text{cm})$ le coefficient de diffusion des neutrons thermiques dans ce milieu,
- $\Sigma_a(\text{cm}^{-1})$ la section efficace macroscopique de capture du milieu pour ces neutrons,
- $\Phi(x)$ le flux thermique au point x ,
- ∇^2 l'opérateur laplacien.

* Exposé à la réunion de la S.F.R.P. tenue à l'I.N.S.T.N. le 6 mai 1968.

** S.E.S.R - Centre d'Etudes Nucléaires de Cadarache, B.P. n° 1, 13 - St-Paul-lez-Durance.

Considérons un point de coordonnées x et un volume de 1 cm^3 entourant ce point.

L'équation de la diffusion exprime que le bilan neutronique de ce cm^3 est nul; en d'autres termes, elle traduit le fait que le total des neutrons produits par seconde dans ce cm^3 , c'est-à-dire $S_{(x)}$, est égal à la somme :

- du nombre de neutrons sortant de ce cm^3 , soit $-D \cdot \nabla^2 \Phi_{(x)}$,
- et du nombre de captures dans ce cm^3 , soit $\Sigma_a \Phi_{(x)}$.

L'équation de la diffusion s'écrit donc :

$$D \cdot \nabla^2 \Phi_{(x)} - \Sigma_a \cdot \Phi_{(x)} + S_{(x)} = 0 \quad (1)$$

En divisant par Σ_a et en posant :

$$L^2_* = \frac{D}{\Sigma_a} \quad (L_* \text{ longueur de diffusion})$$

l'équation devient :

$$L^2_* \cdot \nabla^2 \Phi_{(x)} - \Phi_{(x)} + \frac{S_{(x)}}{\Sigma_a} = 0 \quad (1')$$

Ici, nous ferons une hypothèse qui est presque toujours satisfaite dans les cas pratiques :

Nous admettrons que l'opérateur $-\nabla^2$, associé aux conditions limites du problème, *est un opérateur positif et symétrique*.

D'après un théorème bien connu en analyse fonctionnelle, ses valeurs propres sont alors toutes réelles et positives. Nous les désignerons donc par un carré parfait B^2_n .

Selon le même théorème, la famille des fonctions propres de cet opérateur constitue un système orthogonal. Ces valeurs propres et ces fonctions propres satisfont, par définition même, à l'équation :

$$-\nabla^2 Z_{n(x)} = B^2_n Z_{n(x)} \quad (2)$$

Cette propriété d'orthogonalité des fonctions propres suggère de résoudre l'équation de diffusion en utilisant les *développements en série de Fourier de*

$\Phi_{(x)}$ et $S_{(x)}$ par rapport aux fonctions $Z_{n(x)}$:

$$\Phi_{(x)} = \sum_n a_n Z_{n(x)} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$S_{(x)} = \sum_n S_n \cdot Z_{n(x)} \quad n = 1, 2, \dots$$

Remplaçant Φ et S par ces développements dans l'équation de diffusion, et $\nabla^2 Z_n$ par $-B_n^2 Z_n$ (équation 2) il vient aussitôt :

$$\sum_n a_n Z_n \cdot (1 + B_n^2 L_*^2) = \frac{1}{\Sigma_a} \sum_n S_n Z_n$$

Cette équation exprime l'identité de deux développements en série de FOURIER par rapport aux Z_n . Ecrivons que les coefficients de ces deux développements sont égaux 2 à 2 :

$$a_n = \frac{S_n}{\Sigma_a (1 + B_n^2 L_*^2)} \quad (3)$$

Le flux thermique cherché $\Phi_{(x)}$ est donc :

$$\Phi_{(x)} = \sum a_n Z_{n(x)} = \sum_n \frac{S_n \cdot Z_{n(x)}}{\Sigma_a (1 + B_n^2 \cdot L_*^2)}$$

2. EXTENSION DE LA THÉORIE DE LA DIFFUSION A ÉNERGIE CONSTANTE A LA THÉORIE DU RALENTISSEMENT MULTIGROUPE

Le concept de ralentissement est schématisé sur la figure ci-dessous qui représente, en ordonnées, le logarithme de l'énergie des neutrons et, en abscisses, le temps :

Les neutrons de la source possèdent tous l'énergie de départ E_0 .

Ils sont censés subir une série de chocs élastiques qui les amènent successivement aux énergies E_1, E_2 , etc., pour aboutir finalement à l'énergie thermique.

La théorie élémentaire des chocs élastiques montre, qu'à chaque choc, les neutrons perdent en moyenne toujours la même fraction de leur énergie.

C'est pourquoi l'escalier représenté par la figure ci-dessus est constitué par des marches de hauteurs égales.

Le long de chacune de ces marches, *les neutrons diffusent à énergie constante* pendant un certain temps, qui est figuré en abscisse.

Plaçons-nous donc sur la marche de rang j et désignons par :

Φ_j le flux des neutrons de la marche de rang j qui correspond à l'énergie E_{j-1}

D_j le coefficient de diffusion correspondant.

Dans ce cm^3 entourant le point x , nous allons avoir, comme précédemment au cours de la diffusion à énergie constante :

- une fuite géométrique — $D_j \cdot \nabla^2 \Phi_j$,
- une capture fictive $\Sigma_j \Phi_j$ représentant le nombre de neutrons par cm^3/s qui quittent la marche j pour la marche $j + 1$,
- une source fictive $\Sigma_{j-1} \cdot \Phi_{j-1}$ représentant le nombre de neutrons par cm^3/s qui alimentent la marche j à partir de la marche $j - 1$.

Nous pourrions donc écrire la même équation (1) que dans le cas de la diffusion étudié au chapitre 2.

$$D_j \nabla^2 \Phi_j - \Sigma_j \Phi_j + \Sigma_{j-1} \Phi_{j-1} = 0.$$

Evidemment, dans le cas du premier groupe ($j = 1$) le terme $\Sigma_{j-1} \cdot \Phi_{j-1}$ est remplacé par le terme de source $S(x)$.

Comme dans le cas de la diffusion simple, nous écrivons cette équation en divisant par Σ_j et en posant :

$$L_j^2 = \frac{D_j}{\Sigma_j}.$$

L_j est homogène à une longueur; on l'appelle *longueur de ralentissement*. Son carré est homogène à une surface, on l'appelle *âge des neutrons* du groupe $j + 1$ par rapport aux neutrons du groupe j :

$$L_j^2 \nabla^2 \Phi_j - \Phi_j + \frac{\Sigma_{j-1}}{\Sigma_j} \cdot \Phi_{j-1} = 0.$$

Bien entendu, nous résoudrons cette équation d'une manière rigoureusement identique à celle utilisée au chapitre 2, par les développements en série de FOURIER.

Supposons d'abord, pour simplifier, que l'escalier soit réduit à une seule marche. En d'autres termes, il n'y a que deux groupes de neutrons :

- le groupe rapide de la source : groupe n° 1 - Energie E_0 ,
- le groupe thermique : groupe n° 2 - Energie E_1 .

En vertu de ce qui précède, nous aurons :

$$L_1^2 \nabla^2 \Phi_1 - \Phi_1 + \frac{S}{\Sigma_1} = 0 \quad \text{pour le premier groupe,}$$

$$L_2^2 \nabla^2 \Phi_2 - \Phi_2 + \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} \cdot \Phi_1 = 0 \quad \text{pour le deuxième groupe.}$$

Comme au chapitre 2, nous remplaçons les fonctions flux et sources par leurs développements de FOURIER :

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \sum_n a_n Z_{n(x)} & n &= 1, 2 \dots \\ \Phi_2 &= \sum_n c_n Z_{n(x)} & n &= 1, 2 \dots \\ S &= \sum_n S_n Z_{n(x)} & n &= 1, 2 \dots\end{aligned}\quad (4)$$

La première des deux équations laplaciennes est formellement identique à l'équation (1') du chapitre 1. Nous avons donc (voir équation 3) :

$$a_n = \frac{S_n}{\Sigma_1 \cdot (1 + B_n^2 L_1^2)} \quad (5)$$

Quant à la deuxième, elle devient, en substituant à Φ_1 et Φ_2 leurs développements de FOURIER, puis $B_n^2 Z_n$ à $-\nabla^2 Z_n$ en vertu de l'équation (2) :

$$\sum_n c_n Z_n \cdot (1 + B_n^2 L_2^2) = \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} \cdot \sum_n a_n Z_n$$

qui donne par identification une deuxième expression de a_n :

$$a_n = c_n \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} \cdot (1 + B_n^2 \cdot L_2^2) \quad (6)$$

qui donne en rapprochant de la première (expression 5) :

$$c_n = \frac{S_n}{\Sigma_2 (1 + B_n^2 L_2^2) (1 + B_n^2 L_1^2)}$$

Mais dans le groupe thermique (groupe 2) :

L_2 s'appelle L_*

Σ_2 s'appelle Σ_a

Φ_2 s'appelle Φ_{th} .

On aura donc finalement, d'après (4) :

$$\Phi_{th} = \Phi_{2(x)} = \sum_n \frac{S_n Z_{n(x)}}{\Sigma_a (1 + B_n^2 L_*^2) (1 + B_n^2 L_1^2)}$$

Si nous avons utilisé trois groupes au lieu de deux, c'est-à-dire deux marches d'escalier au lieu d'une, nous eussions écrit de même :

$$\begin{aligned}L_1^2 \nabla^2 \Phi_1 - \Phi_1 + \frac{S}{\Sigma_1} &= 0 \\ L_2^2 \nabla^2 \Phi_2 - \Phi_2 + \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} \Phi_1 &= 0 \\ L_3^2 \nabla^2 \Phi_3 - \Phi_3 + \frac{\Sigma_2}{\Sigma_3} \Phi_2 &= 0.\end{aligned}$$

Dans ce cas, la troisième équation est résolue suivant un formalisme rigoureusement identique à celui utilisé pour la deuxième et, on trouve sans difficulté, en utilisant toujours pour le groupe 3 les notations du groupe thermique :

$$\Phi_3 = \sum_n \frac{S_n Z_{n(x)}}{\Sigma_a (1 + B_n^2 L_*^2) (1 + B_n^2 L_1^2) (1 + B_n^2 L_2^2)}$$

et de façon générale pour N groupes :

$$\Phi_N = \sum_n \frac{S_n Z_{n(x)}}{\Sigma_a (1 + B_n^2 L_*^2) (1 + B_n^2 L_1^2) \dots (1 + B_n^2 L_{N-1}^2)}$$

REMARQUE - NOTATIONS HABITUELLES

Dans la théorie générale de la diffusion multigroupe, due à WEINBERG [1], on démontre que les quantités :

$$\bar{P}_{1\infty(E_1, B^2_n)} = \frac{1}{1 + B_n^2 L_1^2}, \quad \bar{P}_{2\infty} = \frac{1}{1 + B_n^2 L_2^2} \text{ etc.} \quad (7)$$

sont les transformées de FOURIER du noyau de diffusion et, avec ces notations, la formule donnant le flux au point x dans le groupe N s'écrit :

$$\Phi_{(x, E_{N-1})} = \sum_n \frac{S_n Z_{n(x)}}{\Sigma_a (1 + B_n^2 L_*^2)} \cdot \bar{P}_{1\infty(E_1, B^2_n)} \dots \bar{P}_{N-1\infty(E_{N-1}, B^2_n)} \quad (8)$$

On démontre très aisément de même, que la densité de ralentissement au point x dans le groupe N , a pour expression :

$$\mathcal{Q}_{(x, E_{N-1})} = \sum_n S_n Z_{n(x)} \cdot \bar{P}_{1\infty(E_1, B^2_n)} \dots \bar{P}_{N-1\infty(E_{N-1}, B^2_n)} \quad (9)$$

B - APPLICATION AU DÉTECTEUR POLYSPHÈRE

1. FORMULATION A DEUX GROUPES

Dans ce cas simple, on suppose que le neutron ne subit qu'un seul choc, qui le fait passer directement du groupe rapide (énergie E_0) au groupe thermique (énergie E_1).

Les formules (8) et (9) ne comportent donc qu'un seul facteur $\bar{P}_{\infty}$.

Nous allons appliquer ces formules au cas particulier des sphères de BRAMBLETT, qui seront supposées plongées dans un flux isotrope. Pour les besoins d'abstraction du calcul, ce flux sera remplacé par une source-coquille de rayon R_0 ,

égal au rayon vrai de la sphère de BRAMBLETT, dont le rayon extrapolé sera désigné par R .

La source-coquille émet S neutron/cm² sur toute la surface, cette quantité S étant égale au flux isotrope qu'elle représente. Analytiquement, la fonction source est donc : $S \cdot \delta_{(r-R_0)}$ où δ désigne la « fonction » de DIRAC.

Dans cette géométrie sphérique, on sait que l'opérateur laplacien a pour expression :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

On sait également que ses fonctions propres et ses valeurs propres ont respectivement pour expressions :

$$Z_n(r) = \frac{\sin n \frac{\pi}{R} r}{r} \quad (10)$$

$$B_n = \frac{n \pi}{R} \quad (11)$$

Enfin, on montre immédiatement que le développement en série de FOURIER de la fonction source $S \cdot \delta_{(r-R_0)}$ (et de son prolongement analytique en dehors du milieu) :

$$\sum_n S_n \cdot \frac{\sin n \frac{\pi}{R} r}{r}$$

a pour coefficients S_n :

$$S_n = S \cdot \frac{R_0}{R} \sin n \pi \frac{R_0}{R} \quad (12)$$

On effectue alors les opérations très simples qui suivent :

a) On remplace dans (8) et (9) les grandeurs :

P_∞ , Z_n , B_n , S_n , par leurs expressions :

(7) (10) (11) (12)

b) Pour simplifier l'écriture, on pose :

$$\frac{R^2}{\pi^2 L_1^2} = k_1^2$$

$$\frac{R^2}{\pi^2 L_*^2} = k_*^2$$

$$\theta = \pi \frac{R - R_0}{R}$$

c) On remarque que :

$$\sin n \pi \frac{R_0}{R} = -(-1)^n \sin n \pi \frac{R - R_0}{R} = -(-1)^n \sin n \theta.$$

d) On fait $r = 0$ puisqu'on ne s'intéresse qu'au flux au centre. On obtient ainsi immédiatement :

$$Q_{(r=0, E_1)} = -S \frac{R_0}{R^2} \pi \cdot k^2_1 \sum_n (-1)^n \cdot \frac{n}{n^2 + k^2_1} \cdot \sin n \theta \quad (13)$$

$$\Phi_{(r=0, E_1)} = -S \frac{R_0}{R^2} \frac{\pi}{\Sigma_a} \cdot k^2_1 \cdot k^2_* \sum_n (-1)^n \cdot \frac{n}{n^2 + k^2_1} \cdot \frac{1}{n^2 + k^2_*} \cdot \sin n \theta \quad (14)$$

Nous avons calculé la somme des séries qui figurent dans les expressions précédentes. Ce calcul est donné en détail dans l'annexe. Ces séries remplacées ainsi par leur somme, les formules deviennent :

$$Q_{(E_1)} = S \frac{R_0}{2 R^2} \cdot \pi^2 \cdot k^2_1 \cdot \frac{Sb \frac{R - R_0}{L_1}}{Sb \frac{R}{L_1}} \quad (13')$$

$$\Phi_{(E_1)} = \frac{S}{2 \Sigma_a} \cdot \frac{R_0}{R^2} \pi^2 \cdot k^2_1 \cdot k^2_* \left[\frac{Sb \frac{R - R_0}{L_1}}{\frac{R}{k^2_* - k^2_1}} + \frac{Sb \frac{R - R_0}{L_*}}{\frac{R}{k^2_1 - k^2_*}} \right] \quad (14')$$

2 - FORMULATION A TROIS GROUPE

Dans ce cas, le neutron est supposé subir d'abord un premier choc qui le fait passer du groupe rapide (énergie E_0) au groupe 2 (épithermique, énergie E_1) puis un 2^o choc qui le fait passer du groupe 2 au groupe 3 (thermique, énergie E_2).

Les formules (8) et (9) sont les mêmes à ceci près qu'elles comportent deux facteurs $\bar{P}_\infty$ au lieu d'un seul.

$$P_{1\infty} = \frac{1}{1 + B^2_n L^2_1}$$

$$P_{2\infty} = \frac{1}{1 + B^2_n L^2_2}$$

Le calcul est rigoureusement identique à celui qui a été fait pour 2 groupes. Les formules (13) et (14) deviennent avec les mêmes notations :

$$Q_{(E_2)} = -S \frac{R_0}{R^2} \pi \cdot k^2_1 \cdot k^2_2 \sum_n (-1)^n \frac{1}{n^2 + k^2_1} \cdot \frac{1}{n^2 + k^2_2} n \cdot \sin n \theta \quad (15)$$

$$\Phi_{(E_2)} = -S \frac{R_0}{R^2} \frac{\pi}{\Sigma_a} \cdot k^2_1 \cdot k^2_2 \cdot k^2_* \Sigma (-1)^n \frac{1}{n^2 + k^2_1} \cdot \frac{1}{n^2 + k^2_2} \frac{1}{n^2 + k^2_*} \cdot n \sin n \theta \quad (16)$$

Comme pour les formules à deux groupes, nous sommes parvenus à sommer les séries. Le détail de cette sommation figure en annexe et conduit à mettre (15) et (16) sous la forme finale :

$$Q_{(E_2)} = S \cdot \frac{R_0}{2 R^2} \pi^2 \cdot k^2_1 \cdot k^2_2 \cdot \left[\frac{Sb \frac{R - R_0}{L_1}}{\frac{Sb \frac{R}{L_1}}{k^2_2 - k^2_1}} + \frac{Sb \frac{R - R_0}{L_2}}{\frac{Sb \frac{R}{L_2}}{k^2_1 - k^2_2}} \right] \quad (15')$$

$$\Phi_{(E_2)} = \frac{S}{2 \Sigma_a} \cdot \frac{R_0}{R^2} \cdot \pi^2 \cdot k^2_1 k^2_2 k^2_* \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{Sb \frac{R - R_0}{L_1}}{\frac{Sb \frac{R}{L_1}}{(k^2_2 - k^2_1)(k^2_* - k^2_1)}} + \frac{Sb \frac{R - R_0}{L_2}}{\frac{Sb \frac{R}{L_2}}{(k^2_* - k^2_2)(k^2_1 - k^2_2)}} + \frac{Sb \frac{R - R_0}{L_*}}{\frac{Sb \frac{R}{L_*}}{(k^2_1 - k^2_*)(k^2_2 - k^2_*)}} \right] \quad (16')$$

3 - FORMULES GÉNÉRALES

En comparant les formules donnant Q et Φ pour des valeurs croissantes du nombre de groupes, on voit se dégager la loi générale pour $n + 1$ groupes qui peut se formuler comme suit :

$$Q_{(En)} = S \frac{R_0}{2 R^2} \pi^2 \prod_{i=1}^{i=n} k^2_i \cdot \sum_{j=1}^{j=n} \frac{Sb \frac{R - R_0}{L_j}}{\frac{Sb \frac{R}{L_j}}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{l=n} (k^2_l - k^2_j)}} \quad (17)$$

(n-1 facteurs)

$$\Phi_{(En)} = \frac{S}{2 \Sigma_a} \frac{R_0}{2 R^2} \pi^2 k^2_* \prod_{i=1}^{i=n} k^2_i \sum_{j=1}^{j=n+1} \frac{Sb \frac{R - R_0}{L_j}}{\frac{Sb \frac{R}{L_j}}{\prod_{\substack{l=n+1 \\ l \neq j}}^{l=n+1} (k^2_l - k^2_j)}} \quad (18)$$

(n facteurs)

Remarque

Les symboles de produits ou de sommation affectés d'une étoile portent sur un indice pouvant prendre $n + 1$ valeurs. Il est sous-entendu par ce symbole que la $(n + 1)^{\text{ème}}$ valeur de cet indice correspond aux grandeurs affectées elles-mêmes de l'indice *, à savoir : L_* ou k_* suivant le cas.

Le nombre total de groupes sera désigné par $N = n + 1$.

C - RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET CONCLUSION

Les formules (17) et (18), en sinus hyperbolique, ont surtout un intérêt théorique, parce qu'elles sont mathématiquement exactes; elles se prêtent assez bien aux calculs manuels, quand le nombre de groupes est petit (jusqu'à 3 par exemple).

Elles présentent toutefois l'inconvénient de supposer essentiellement $k_i \neq k_j$.

En pratique les quantités Q et Φ sont déterminées au moyen d'un code, exploité sur machine IBM-360, en calculant numériquement chaque terme de la série et en faisant ensuite leur somme, jusqu'à un rang suffisant pour limiter l'erreur systématique, suivant le procédé indiqué dans l'annexe II. Les données sont les suivantes :

- Energie E_0 de la source monocinétique.
- Nombre de groupes d'énergies de 2 à N .
- Table donnant le carré L^2_i de la longueur de ralentissement des neutrons dans le polythène en fonction de l'énergie E_i (valeurs calculées préalablement au moyen du programme FORM).
- Rayon R_0 de la sphère de BONNER.
- Rayon extrapolé R correspondant.

Cette dernière quantité est déterminée à partir de R_0 et du libre parcours moyen de transport λ_{tr} des neutrons dans le polythène. Comme ce libre parcours est fonction de l'énergie des neutrons en cours de ralentissement, on en prend une valeur moyenne pour chaque énergie de source E_0 .

C'est là précisément que se trouve le point faible de ce genre de calculs :

La donnée de ce λ_{tr} moyen est incertaine, alors que son influence sur le résultat est loin d'être négligeable. Les valeurs adoptées pour notre calcul sont les suivantes :

E_0	250 keV	100 keV	50 keV	10 keV	1 keV	100 eV	10 eV	1 eV	0,1 eV
λ_{tr} cm	1,34	1,09	0,985	0,85	0,75	0,67	0,57	0,46	0,39

Le tableau qui suit donne les résultats obtenus pour un appareil équipé d'un cristal de sensibilité supposée égale à $0,175$ impulsion/n.cm⁻² dans un flux thermique isotrope.

 SENSIBILITÉS CALCULÉES EN IMPULSION/NEUTRON-CM⁻²

Diamètre sphères en pouces Energies	2"	2,5"	3"	4"	5"	6"	8"	10"	12"
250 keV	0,0208	0,0508	0,093	0,172	0,215	0,213	0,141	0,069	0,029
100 keV	0,024	0,058	0,100	0,1755	0,204	0,1875	0,109	0,049	0,02
50 keV	0,026	0,062	0,104	0,174	0,1935	0,173	0,096	0,0421	0,0171
10 keV	0,035	0,076	0,120	0,178	0,181	0,150	0,0763	0,0325	0,0132
1 keV	0,056	0,104	0,147	0,185	0,167	0,1275	0,060	0,0254	0,0101
100 eV	0,0930	0,144	0,1765	0,183	0,147	0,105	0,0473	0,0199	0,0079
10 eV	0,1345	0,1715	0,1825	0,158	0,117	0,081	0,036	0,0151	0,0061
1 eV	0,165	0,1675	0,156	0,120	0,086	0,0595	0,0262	0,011	0,00445
0,1 eV	0,159	0,142	0,125	0,0925	0,0662	0,046	0,0204	0,00845	0,00347
0,025 eV	0,150	0,134	0,118	0,0875	0,0626	0,0435	0,0193	0,0082	0,0033

La figure présente ces mêmes valeurs sous la forme d'un réseau de courbes.

Ces résultats sont surtout donnés pour illustrer l'application de la méthode décrite, mais les données du calcul (surtout les valeurs de λ_{tr}) sont encore trop incertaines pour qu'ils puissent servir de base à l'exploitation du système poly-sphère.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GLASSTONE. The elements of nuclear reactor theory. Van Nostrand Company, 1952.

RÉPONSE DES SPHÈRES DE BONNER ENTRE 0,025 eV et 250 keV Calcul de diffusion multigroupe

N.B. — Les constantes thermiques adoptées pour le polythène sont : $L_{-g} = 2,33$ cm, $\Sigma_a = 0,0232$ cm⁻¹.
La région en tirets correspond aux résultats expérimentaux de BONNER.

ANNEXE I

SOMMATION DES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE DE FOURIER

Les formules (13), (14), (15), (16), contiennent des séries de FOURIER dont nous nous proposons ici de calculer la somme.

Nous remarquons que le développement en série contenu dans la formule (13) a un air de parenté avec le développement en série de FOURIER bien connu de la fonction exponentielle, plus exactement de la fonction périodique $f_k(\theta)$ définie dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ par les relations :

$$f_k(\theta) = \begin{cases} e^{k\theta} & 0 < \theta < \pi \\ -e^{-k\theta} & -\pi < \theta < 0 \\ 0 & \theta = 0 \end{cases}$$

$$e^{k\theta} = \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{n}{n^2 + k^2} (1 - e^{k\pi} \cos n\pi) \sin n\theta \quad \boxed{0 < \theta < \pi}$$

$$e^{-k\theta} = \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{n}{n^2 + k^2} (1 - e^{-k\pi} \cos n\pi) \sin n\theta \quad \boxed{0 < \theta < \pi}$$

En soustrayant ces 2 formules, membre à membre :

$$Sh\ k\ \theta = -\frac{2}{\pi} \sum \frac{n}{n^2 + k^2} Sh\ k\ \pi \cos n\pi \sin n\theta$$

Or, en soustrayant les expressions de $\sin n(\theta + \pi)$ et de $\sin n(\theta - \pi)$, on voit aussitôt que :

$$\sin n\theta \cdot \cos n\pi = (-1)^n \sin n\theta$$

En reportant dans la formule précédente, on obtient donc :

$$\boxed{\sum (-1)^n \frac{n}{n^2 + k^2} \sin n\theta = -\frac{\pi}{2} \frac{Sh\ k\ \theta}{Sh\ k\ \pi}} \quad (a-1)$$

Calculons maintenant le développement en série de la formule (14). Nous allons utiliser pour cela la formule $(a-1)$ que nous écrivons pour deux valeurs différentes de k .

En même temps, pour alléger l'écriture, nous poserons :

$$a = -\frac{\pi}{2} \frac{Sh\ k\ \theta}{Sh\ k\ \pi} \quad (a-2)$$

$$a_* = \sum (-1)^n \frac{n}{n^2 + k_*^2} \sin n\theta$$

$$a_1 = \sum (-1)^n \frac{n}{n^2 + k_1^2} \sin n\theta$$

En soustrayant membre à membre :

$$a_* - a_1 = \sum (-1)^n \frac{k_1^2 - k_*^2}{(n^2 + k_*^2)(n^2 + k_1^2)} n \cdot \sin n \theta$$

$$\boxed{\frac{a_* - a_1}{k_1^2 - k_*^2} = \sum (-1)^n \frac{1}{n^2 + k_*^2} \cdot \frac{1}{n^2 + k_1^2} n \cdot \sin n \theta} \quad (a-3)$$

De même, en soustrayant membre à membre 2 formules $(a-3)$ écrites pour 2 valeurs différentes de k on obtient immédiatement :

$$\frac{1}{k_2^2 - k_1^2} \left(\frac{a_* - a_1}{k_1^2 - k_*^2} - \frac{a_* - a_2}{k_2^2 - k_*^2} \right) =$$

$$\sum (-1)^n \frac{1}{n^2 + k_*^2} \cdot \frac{1}{n^2 + k_1^2} \cdot \frac{1}{n^2 + k_2^2} n \sin n \theta \quad (a-4)$$

On généralise immédiatement aux développements d'ordre supérieur. Il suffit maintenant de remplacer les développements en série des formules (13), (14), (15), etc., par leur expression correspondante $(a-1)$, $(a-3)$, $(a-4)$. Quand la substitution est faite et l'élaboration du calcul terminée, on remplace a par son expression $(a-2)$ en tenant compte des expressions de θ et k données au chapitre III :

$$a = -\frac{\pi}{2} \frac{Sb \frac{R - R_0}{L}}{Sb \frac{R}{L}}$$

On obtient alors les formules finales (13') (14') (15'), etc.

ANNEXE II

SOMMATION NUMÉRIQUE DES SÉRIES

Le texte précédent donne l'expression de la densité de ralentissement et du flux au centre de la sphère, selon la théorie multigroupe. Dans le cas de N groupes, on obtient :

$$\begin{aligned} Q_{(E_{N-1})} &= -S \frac{R_0}{R^2} \pi \cdot k_1^2 \cdot k_2^2 \dots k_{N-1}^2 \cdot \\ &\quad \cdot \sum (-1)^n \frac{1}{n^2 + k_1^2} \cdot \frac{1}{n^2 + k_2^2} \dots \frac{1}{n^2 + k_{N-1}^2} \cdot n \cdot \sin n\theta \\ \Phi_{(E_{N-1})} &= -S \frac{R_0}{R^2} \cdot \frac{\pi}{\Sigma a} \cdot k_1^2 \cdot k_2^2 \dots k_{N-1}^2 \cdot k_*^2 \cdot \\ &\quad \cdot \sum (-1)^n \frac{1}{n^2 + k_1^2} \cdot \frac{1}{n^2 + k_2^2} \dots \frac{1}{n^2 + k_{N-1}^2} \cdot \frac{1}{n^2 + k_*^2} \cdot n \cdot \sin n\theta. \end{aligned}$$

Ce texte donne également ces formules dans lesquelles les séries de FOURIER sont remplacées par l'expression analytique de leur somme. Mais cette expression n'est valable que dans l'hypothèse où l'on a essentiellement :

$$k_i \neq k_j$$

quels que soient i et j .

Or, cette condition n'est pas toujours satisfaite.

Il reste la solution simple qui consiste évidemment à calculer numériquement chaque terme et à faire ensuite la somme.

L'inconvénient de ce procédé est qu'il exige un choix du nombre maximal n des termes à sommer pour que l'erreur relative p , commise en négligeant les autres, soit inférieure à une limite fixée. C'est ce que nous appelons l'erreur systématique relative.

Un autre inconvénient de ce procédé tient au fait qu'en faisant la somme de n nombres calculés avec une erreur relative possible de 10^{-q} , l'erreur relative sur cette somme pourrait atteindre $n \cdot 10^{-q}$, si les nombres ajoutés étaient du même ordre de grandeur.

Cette erreur de calcul peut ne pas être négligeable. La machine travaillant avec six chiffres significatifs, l'erreur d'arrondi sur chaque nombre calculé est au maximum de 10^{-5} ($q = 5$).

Si on veut être sûr que l'erreur sur la somme de n termes du même ordre de grandeur ne dépasse pas 10^{-3} , il faut donc :

$$n \leq 100$$

Si cette condition est satisfaite, nous considérerons l'erreur de calcul comme admissible.

LIMITE SUPÉRIEURE DE L'ERREUR SYSTÉMATIQUE

La raisonnement qui suit s'applique aussi bien à la série contenue dans l'expression de Q qu'à celle qui est contenue dans l'expression de Φ :

1° L'erreur systématique absolue R_n commise sur la somme de la série, en supprimant tout ce qui est à droite du n^{e} terme u_n est, de toute évidence, inférieure à l'erreur commise sur la somme de la série à termes positifs correspondante.

2° L'erreur commise sur la somme de la série à termes positifs, en supprimant tout ce qui est à droite de son n^{e} terme, est elle-même inférieure à l'erreur commise sur la somme de la même série, dans laquelle on a remplacé $|\sin \theta|$ par 1 et tous les k_i^2 par zéro.

Il est clair que le terme général de cette dernière série (série de RIEMANN) est :

$$u_n = \frac{1}{(n)^2 \cdot N-3} \text{ si elle est tirée de l'expression de } Q.$$

$$v_n = \frac{1}{(n)^2 \cdot N-1} \text{ si elle est tirée de l'expression de } \Phi.$$

Les séries de RIEMANN ne convergent que si l'exposant de n est plus grand que 1. Aussi, notre raisonnement suppose-t-il essentiellement que le nombre de groupes N est supérieur à 2.

En vertu des deux remarques précédentes, nous avons donc :

$$R_n < \sum_{n=n}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{2N-3}} \text{ dans le cas de la série } \mathcal{Q}. \quad (1)$$

$$R_n^* < \sum_{n=n}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{2N-1}} \text{ dans le cas de la série } \Phi. \quad (2)$$

Considérons maintenant la figure ci-après :

On a placé en abscisses une variable x , qui prend les valeurs successives $n, n+1, n+2, n+3 \dots$. En ordonnées, on a porté les valeurs correspondantes de la fonction :

$$y = \frac{1}{(x)^{2N-3}}$$

$$\sum_{n=n}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{2N-3}} = \frac{1}{(n+1)^{2N-3}} \times 1 + \frac{1}{(n+2)^{2N-3}} \times 1 + \dots$$

Chacun des termes de cette série a donc pour valeur l'aire d'un rectangle hachuré et la somme a pour valeur l'aire de l'histogramme hachuré qui est, elle-même, inférieure à l'aire située sous la courbe y mesurée de n à l'infini. On a donc selon l'inégalité (1) :

$$R_n < \int_{x=n}^{\infty} \frac{dx}{x^{2N-3}} = \frac{1}{2(N-2) \cdot n^{2(N-2)}}$$

On montre de la même manière pour la série de Φ :

$$R_n^* < \int_{x=n}^{\infty} \frac{dx}{x^{2N-1}} = \frac{1}{2(N-1) \cdot n^{2(N-1)}}$$

En désignant respectivement par S_n et S_n^* les sommes des n premiers termes des séries de FOURIER contenues dans les expressions de $\mathcal{Q}$ et Φ , les erreurs systématiques relatives, commises en abandonnant les termes d'ordre supérieur à n sont :

$$\frac{R_n}{S_n} \text{ pour l'expression de } \mathcal{Q}$$

$$\frac{R_n^*}{S_n^*} \text{ pour l'expression de } \Phi$$

MODE OPÉRATOIRE

La machine calcule :

— le terme u_1 de la série dans l'expression de $\mathcal{Q}$,

— la somme $S_1 = u_1$,

— la quantité $P_1 = \frac{1}{S_1} \cdot \frac{1}{2(N-2) \cdot (-1)^{2(N-2)}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } P_1 < 10^{-3} \text{ elle calcule } \mathcal{Q} \text{ à partir de } S_1 \\ \text{si } P_1 > 10^{-3} \text{ elle continue et calcule de façon générale :} \end{array} \right.$$

— le terme u_k ,

— la somme $S_k = u_1 + u_2 + \dots + u_k$,

la quantité $P_k = \frac{1}{S_k} \cdot \frac{1}{2(N-2) \cdot k^{2(N-2)}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } P_k < 10^{-3} \text{ elle calcule } \mathcal{Q} \text{ à partir de } S_k \\ \text{si } P_k > 10^{-3} \text{ elle continue.} \end{array} \right.$$

On utilise le même principe dans le calcul de Φ .