

## SOLUTION DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT PAR LA MÉTHODE DES MOMENTS

G. NURDIN \*

(Manuscrit reçu le 24 juin 1968)

### RÉSUMÉ

Après avoir rappelé les hypothèses physiques sur lesquelles on se base dans cette étude limitée au rayonnement gamma, l'introduction de grandeurs sans dimension permet de ramener un milieu inhomogène à un milieu homogène. Le cas d'une source stationnaire est ensuite considéré comme étant un cas particulier d'une source de Dirac. On généralise ensuite la méthode des moments, méthode classique et fructueuse pour le cas stationnaire sous réserve que le milieu de propagation soit semi-infini et que les distances de pénétration n'excèdent pas 15 libres parcours moyens.

### I - INTRODUCTION

La méthode que nous exposons a pour but de traiter le problème de la propagation du rayonnement gamma dans une atmosphère inhomogène semi-infinie, pour une source monoénergétique, à des distances égales au plus à 15 libres parcours moyens. Plus précisément, on désire évaluer  $I_0(X, E, t)$  spectre différentiel d'énergie, que par commodité nous appellerons le plus souvent flux, à une distance  $X$  en centimètres, flux dont l'énergie est comprise entre  $E$  et  $E + dE$ , par unité de temps à l'instant  $t$  en secondes. Ce flux sera calculé pour des sources soit stationnaires soit de Dirac au temps  $t = 0$ . (On appelle source de Dirac au temps  $t = 0$ , une impulsion très grande se déroulant en une durée très courte et que l'on note par  $\delta(t)$ ).

Examinons à présent la géométrie des sources que nous allons rencontrer.

Elles seront toujours isotropes soit planes infinies, soit ponctuelles. Toutefois l'équation de Boltzmann de départ sera toujours celle relative à une source plane car les calculs entrepris avec l'équation relative à une source ponctuelle conduisent à des développements inextricables. Cependant si  $I_0^*(R, E, t)$  désigne le flux relatif à une source ponctuelle (dans les notations, les quantités relatives à une source ponctuelle auront toujours un astérisque) à une distance  $R$  en cm et  $I_0$

\* Attaché aux Services Techniques des Armées - Laboratoire Central de l'Armement, 16 bis, avenue Prieur-de-la-Côte-d'Or - 94-Arcueil.

$(X, E, t)$  la quantité correspondante pour une source plane, il existe entre les deux quantités une relation classique :

$$I_0(R, E, t) = - \frac{1}{2 \pi R} \frac{\delta}{\delta X} [I_0(X, E, t)]_{X=R} \quad (1)$$

Comme par ailleurs, la forme analytique de  $I_0(X, E, t)$  en fonction de  $X$  sera toujours parfaitement connue, une dérivation formelle nous permettra de passer immédiatement à  $I_0(R, E, t)$ .

Remarquons que  $I_0$  sera exprimé en MeV/s et  $I_0^*$  en MeV/cm<sup>2</sup>/s.

Avant d'entrer dans le développement de la théorie, il est bon d'analyser tout d'abord les hypothèses physiques sur lesquelles on s'appuie.

## II - HYPOTHÈSES PHYSIQUES DU PROBLÈME

### II.1. INTERACTION ENTRE LES GAMMAS ET LE MILIEU DE DIFFUSION.

Rappelons que  $v$  vitesse des photons dans l'air est égale à  $3 \cdot 10^{10}$  cm/s. Soit  $\lambda$  longueur d'onde\* associée à  $E$  :

$$\lambda = \frac{0.51097}{E} (E \text{ en MeV}) \quad (2)$$

et en particulier  $\lambda_0$  est la longueur d'onde correspondant à l'énergie  $E_0$  de la source.

Les interactions possibles entre un photon et l'air sont l'absorption et l'effet Compton. Considérons ce dernier processus.

Un photon incident de longueur d'onde  $\lambda'$  est diffusé avec une longueur d'onde  $\lambda$  et un angle  $\psi$  qui vérifient la relation

$$\cos \psi = 1 + \lambda - \lambda' \quad (3)$$

L'équation (3) impose donc à  $\lambda$  le domaine de variations

$$\lambda' \leq \lambda \leq \lambda' + 2 \quad (4)$$

soit  $\sigma(E, \vec{\Omega} \rightarrow E', \vec{\Omega}')$  la section efficace microscopique de diffusion de passage de l'état  $E', \vec{\Omega}'$  à l'état  $E, \vec{\Omega}$ .

D'après les hypothèses de KLEIN-NISHINA  $\sigma$  est donnée en unités Thomson ( $1 \text{ cm}^2/\text{atome} = 0,665 \cdot 10^{-24}$  Thomson) par :

$$\sigma(E, \vec{\Omega} \rightarrow E', \vec{\Omega}') = \frac{1}{2 \pi} \frac{0.51097}{E^2} k(\lambda', \lambda) \delta[1 + \lambda' - \lambda - \cos \psi] \quad (5)$$

$$\text{avec} \quad k(\lambda', \lambda) = \frac{3}{8} \frac{\lambda'}{\lambda} \left[ \frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} + 2(\lambda' - \lambda) + \lambda' - \lambda \right]^2 \quad (6)$$

$$\text{pour} \quad \lambda' \leq \lambda \leq \lambda + 2$$

\* Ainsi dénommée par abus de langage (en fait quantité sans dimension).

$k(\lambda', \lambda) = 0$  hors du domaine défini précédemment. Comme par ailleurs les sections efficaces totales sont connues par des tables en fonction de l'énergie, les processus microscopiques d'interaction entre les gammas et l'air sont parfaitement déterminés.

## II.2. VARIATION DE LA DENSITÉ DU MILIEU.

Les calculs doivent se faire en atmosphère réelle où la densité de l'air varie avec l'altitude. Dans cette étude l'air est supposé être un gaz pur de « masse atomique »  $A = 14,43$ , gaz dont la composition en oxygène et en azote est indépendante de l'altitude. Par contre la densité de ce milieu varie avec l'altitude et nous possédons une table de densités de l'altitude 0 à 700 km, les densités étant données tous les 2 km.

Comme on va le voir dans le paragraphe suivant, on doit introduire dans l'équation de Boltzmann, les sections efficaces macroscopiques totales et de diffusion proportionnelles au nombre  $v$  de diffuseurs par unité de volume et par suite à  $\rho$  densité du milieu. Supposons donc que la source se trouve à une altitude  $Z_s$  et le point  $M$  (détecteur) pour lequel on désire calculer le flux à une altitude de  $Z_a$ . Si  $\rho^*(Z)$  désigne la loi de variation de la densité de l'air en fonction de l'altitude  $Z$ , une bonne approximation de  $\rho$  sera donnée par la formule :

$$\rho = \frac{\int_{Z_s}^{Z_a} \rho^*(Z) dZ}{Z_a - Z_s} \quad (7)$$

Seulement l'équation de BOLTZMANN dépendant de  $\rho$  devrait être résolue entièrement pour toutes les configurations source-détecteur et en particulier les moments qui vont être définis plus loin devraient être calculés chaque fois.

Ce serait par suite une très grande perte de temps, le calcul des moments étant très long, la méthode perdrait donc beaucoup de son intérêt. Le problème est maintenant d'éliminer la variable  $\rho$  de l'essentiel des calculs et de stocker l'information maximum relative à un type de source (qui sera caractérisée uniquement par son énergie initiale et non pas en plus par sa position) et de n'introduire la densité variable du milieu qu'au stade le plus avancé des calculs. A cet effet, nous allons introduire des grandeurs sans dimension pour les distances, les sections efficaces, le temps et le flux.

## III - L'ÉQUATION DE BOLTZMANN ET LES GRANDEURS SANS DIMENSION

Afin d'alléger l'exposé, nous allons dans la mesure du possible, donner une forme condensée aux équations, supprimant les indices de dépendance spatiale, énergétique et angulaire, ou ne gardant que ceux strictement nécessaires. On rappelle qu'ayant affaire à un phénomène dépendant du temps qui se propage dans un milieu inhomogène, on désire se débarrasser de la variation par rapport au temps et à la densité pour se ramener au problème mieux connu d'un phéno-

mène stationnaire en milieu homogène. On montre dans ce paragraphe comment ce résultat est obtenu.

Pour une source plane,  $I$  flux différentiel d'énergie vérifie l'équation de Boltzmann qui s'écrit :

$$\left[ \frac{1}{v} \frac{\delta}{\delta t} + \omega \frac{\delta}{\delta X} + v\mu \right] I = v \int KI \, d\zeta + S(E) \delta(X) b(t) \quad (8)$$

$v$  désigne le nombre de diffuseurs en  $\text{cm}^{-3}$ ,

$\mu$  la section efficace à l'énergie  $E$  en  $\text{cm}^2/\text{atome}$ ,

$\omega$  le cosinus de la direction de propagation  $\vec{\Omega}$  avec la normale à la source.

$S(E) \delta(X) b(t)$  représente la contribution due à la source. L'intégrale écrite en (8) est prise sur les domaines d'énergie et d'angle solide (on a  $d\zeta = dE' d\Omega'$ ), le noyau  $K$  est proportionnel à la section efficace de diffusion.

Pour une source stationnaire  $b(t) = 1$ , (8) se réduit à :

$$\left[ \omega \frac{\delta}{\delta X} + v\mu \right] I = v \int KI \, d\zeta + S(E) \delta(X)$$

### III. 1. ELIMINATION DES PARAMÈTRES $v$ .

Afin d'éliminer le paramètre  $v$  qui fait intervenir la densité du milieu, on introduit une distance  $x$  et des sections efficaces  $\mu^*$  et  $K^*$  sans dimension définies par les relations,  $\mu_0$  désignant la section efficace totale à l'énergie de la source en  $\text{cm}^2/\text{atome}$  :

$$x = v \mu_0 X, \quad \bar{K} = \frac{K}{\mu_0}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (9)$$

L'équation précédente s'écrit alors :

$$\left[ \omega \frac{\delta}{\delta x} + \bar{\mu} \right] I = \int \bar{K} I \, d\zeta + S(E) \delta(x) \quad (10)$$

Pour une source ponctuelle, on aurait  $r$  distance sans dimension et  $\Phi_0^*$  flux sans dimension définis par :

$$r = v \mu_0 R \quad \Phi_0^* = \frac{I_0^*}{[v \mu_0]^2} (*) \quad (11)$$

$$\Phi_0^* \text{ et } I_0 \text{ vérifient : } \Phi_0^* = - \frac{1}{2 \pi r} \left[ \frac{\delta}{\delta x} I_0 \right]_{x=r} \quad (12)$$

Passons au cas d'une source de Dirac, où  $b(t) = \delta(t)$ , (8) devient :

$$\left[ \frac{1}{v} \frac{\delta}{\delta t} + \omega \frac{\delta}{\delta x} + v\mu \right] I = v \int KI \, d\zeta + S(E) \delta(X) \delta(t)$$

(\*) En réalité on devrait plutôt appeler  $\Phi_0^*$  flux réduit puisqu'il est exprimé en MeV.

En plus des grandeurs définies par (9), on introduit  $T$  temps sans dimension et  $G$  flux angulaire sans dimension :

$$T = \nu \mu_0 t \quad G = \frac{I}{\nu \mu_0} (*) \quad (13)$$

On a alors :

$$\left[ \frac{\delta}{\delta T} + \omega \frac{\delta}{\delta x} + \bar{\mu} \right] G(T) = \int \bar{K} G(T) d\zeta + S(E) \delta(x) \delta(T) \quad (14)$$

Remarquons qu'à  $G_0$  flux sans dimension pour une source plane, correspond  $G_0^*$  pour une source ponctuelle, les deux quantités étant liées par (12)

$$\text{et} \quad G_0^* = \frac{I_0^*}{\nu (\nu \mu_0)^3} (*). \quad (15)$$

### III.2. ELIMINATION DU TEMPS.

Nous venons donc de nous débarrasser d'un terme gênant dans l'équation de Boltzmann : le nombre  $\nu$  de diffuseurs qui faisait intervenir la densité du milieu ce qui nous aurait conduit à recommencer tous les calculs pour chaque position de la source et chaque position du détecteur. Il nous reste cependant deux équations (10) et (14) selon que la source est stationnaire ou de Dirac. Voyons à présent s'il ne nous est pas possible de ramener ces deux équations à une seule. À cet effet, pour une source de Dirac, on introduit  $H$  transformée de Laplace

$$\text{de } G \text{ définie par } H(p) = \int_0^\infty e^{-pT} G(T) dT \quad (16)$$

$$\text{On montre que } \frac{\delta}{\delta t} \int_0^\infty e^{-pT} G dT = pH \int_0^\infty e^{-pT} \delta(T) dT = 1$$

(14) devient :

$$\boxed{(\bar{\mu} + p) H(p) + \omega \frac{\delta}{\delta x} H(p) = \int \bar{K} H(p) d\zeta + S(E) \delta(x)} \quad (17)$$

$\Phi$  vérifiant (10) vérifie également (17) si  $p = 0$ . On a donc ramené le cas stationnaire à un cas particulier du cas de Dirac. Nous ne parlerons plus, dans les développements qui vont suivre que de ce dernier type de source, étant entendu que les développements relatifs à la transformée de Laplace du flux dans le cas de Dirac sont valables pour le flux dans le cas stationnaire.

En résumé, dans ce paragraphe on a effectué la suite de transformations  $I \rightarrow G \rightarrow H$ , on va montrer dans les paragraphes suivants comment résoudre  $H$  puis comment remonter à  $G$  et à  $I$ .

(\*) La remarque de la page précédente s'applique également ici.

## IV - LA MÉTHODE DES MOMENTS

On a donc simplifié le problème à la recherche des solutions de l'équation (17), dans ce paragraphe on explique comment on peut y arriver par la méthode classique des moments.

## IV.1. EQUATION DES MOMENTS.

Pour la suite, on pose  $\beta = \beta(E, p) = \beta(\lambda, p) = \bar{\mu} + p$  et on a en particulier

$$\beta_0 = \beta(\lambda_0, p) = 1 + p$$

(17) s'écrit sous une forme un peu moins condensée :

$$\beta H(x, \omega, E, p) + \omega \frac{\delta}{\delta x} H(x, \omega, E, p) = \int \bar{K} H(x, \omega', E', p) d\zeta + S(E) \delta(x) \quad (18)$$

Sans compter la variable symbolique  $p$ ,  $H$  dépend de trois paramètres, il faut en éliminer un certain nombre avant de résoudre (18). Remarquons que ce n'est pas  $H$  lui-même qui nous intéresse, mais  $H_0$  transformée de Laplace du flux définie par  $H_0 = \int H d\Omega$ .

On va chercher à éliminer de (18) les paramètres  $x$  et  $\omega$  en introduisant les moments  $b_{nl}(E)$  définis par la relation :

$$b_{nl} = \frac{\beta_0^{n+1}}{n!} \int_{4\pi} d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n P_l(\omega) H \quad (19)$$

$n$  et  $l$  sont deux entiers positifs,  $P_l(\omega)$  désigne le polynôme de Legendre de degré  $l$  (on a en particulier  $P_0(\omega) = 1$  ce qui montre que les  $b_{n0}$  sont les moments de la fonction  $H_0$ ).

Sous réserve que la quantité  $x^n H$  décroisse assez rapidement à l'infini ce qui est physiquement plausible, on multiplie les deux membres de (18) par

$$\frac{\beta_0^{n+1}}{n!} P_l(\omega) x^n$$

et on intègre sur  $dx d\Omega$ . On obtient ainsi une équation ( $\epsilon$ ) que nous n'explicitons pas. Toutefois les moments  $b_{nl}$  contiennent les moments de la partie non diffusée et les moments de la partie diffusée de la radiation. Or, analytiquement, il est possible d'expliciter la partie non diffusée; de plus cette partie de la radiation introduit dans l'équation ( $\epsilon$ ) un terme de Dirac, gênant pour le calcul numérique sur ordinateur. Il est donc préférable pour toutes ces raisons de séparer les deux parties du rayonnement, soient,  $B_{nl}(\lambda)$  les moments de la partie diffusée. Ils vérifient l'équation suivante (déduite de (18) quand on tient compte de (19) et que l'on élimine le flux direct  $\lambda$ ) :

$$\beta B_{nl} = \int_{\lambda \min}^{\lambda} K(\lambda', \lambda) B_{nl}(\lambda') d\lambda' + \frac{\beta_0}{2l+1} [(l+1) B_{n-1, l-1} + l B_{n-1, l+1}] + H \quad (20)$$

La borne  $\lambda_{\min}$  est fixée par la condition physique (4) (elle est égale soit à  $\lambda_0$  soit à  $\lambda - 2$  si  $\lambda > \lambda_0 + 2$ ). Les  $B_{nl}(\lambda)$  présenteront une discontinuité pour

$$\lambda = \lambda_0 + 2.$$

La forme de  $H$  que nous n'explicitons pas montre que pour une source plane, les moments sont nuls si  $n > l$  ou si  $n + l$  est impair.

La séquence des moments à calculer est la suivante :  $B_{00}, B_{11}, B_{20}, B_{31}, B_{40}, \dots$

Les moments nécessaires au calcul du flux seront de la forme  $B_{2m,0}$   $m$  étant un entier positif ou nul.

#### IV.2. CALCUL DES MOMENTS.

Il faut à présent résoudre (20). Seuls les moments  $B_{2m,0}$  nous seront nécessaires pour la suite, mais (20) montre que la connaissance des autres  $B_{nl}$  est nécessaire pour leur calcul. Le schéma de résolution de l'équation intégrale (20) est le suivant :

On part de  $n = l = 0$  et on détermine  $B_{00}(\lambda_0)$ . Les autres  $B_{00}(\lambda)$  sont ensuite calculés de proche en proche pour  $\lambda = \lambda_0 + b$ ,  $\lambda = \lambda_0 + 2b, \dots$ . Le terme intégral étant évalué par la méthode des trapèzes, le pas d'intégration étant une des données du calcul. Ceci étant fait jusqu'à une longueur d'onde  $\lambda_{\max}$  que l'on s'est fixée, on effectue le même calcul pour les  $B_{11}$ , puis pour les  $B_{20}$  et ainsi jusqu'à avoir obtenu le nombre de  $B_{2m,0}$  que l'on s'est fixé.

Il n'est toutefois pas possible, pour des raisons de capacité de la machine de garder tous les moments  $B_{nl}$  ainsi calculés en mémoire centrale de l'ordinateur. Tous les moments  $B_{2m,0}$  nécessaires au calcul du flux seront stockés sur bande magnétique. Au cours du calcul d'une « ligne »  $n + l = \text{constante}$ , tous les moments relatifs à cette ligne seront également stockés soit sur une autre bande, soit sur un tambour si l'ordinateur utilisé en possède un. Ces moments nous serviront au cours du calcul de la « ligne » suivante à évaluer le terme  $B_{n-1, l-1}$  de (20). Tous ces calculs seront faits pour toutes les valeurs de la variable symbolique  $p$  qu'on s'est fixées.

### V - RECONSTRUCTION DE $H(p)$ TRANSFORMÉE DE LAPLACE DU FLUX $G(T)$

Il est possible d'obtenir directement une expression analytique pour le flux non diffusé ainsi que pour le flux diffusé à l'énergie initiale, nous n'insisterons pas sur ce point.

Pour les autres énergies, le flux doit être calculé à partir des moments  $B_{2m,0}$ . On sait maintenant comment résoudre (20) d'où l'on peut déduire  $H(p)$ , il reste à indiquer comment, c'est ce que l'on examine maintenant.

#### V.1. LE PROBLÈME DE LA RECONSTRUCTION DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE A UNE ÉNERGIE QUELCONQUE.

La résolution de (20), pour  $p$  fixé, ne nous donnera, pour des raisons de temps de calcul qu'un nombre assez limité de moments  $B_{2m,0}$ . Or théoriquement, il

existe une infinité de fonctions qui possèdent ces mêmes premiers moments. De cette classe de solutions possibles, il est nécessaire d'en extraire une qui tienne compte du comportement physique du phénomène en fonction de la distance : on admet que le flux doit décroître exponentiellement aux grandes distances.

Compte tenu de cette hypothèse, deux méthodes différentes, qui pratiquement fournissent les mêmes résultats, ce qui prouve le bien-fondé de cette hypothèse, permettent de reconstruire la transformée de Laplace du flux sans dimension à une énergie quelconque. Nous les exposons pour  $H_0^*(r, \lambda, p)$  relatif à la source ponctuelle, mais il est bien entendu que les équations (21) et (24) que nous introduisons par la suite sont une généralisation de la source plane infinie en appliquant (12).

## V.2. RESTITUTION PAR LES POLYNOMES DE SPENCER ET FANO.

On recherche  $H_0^*$  de la forme :

$$H_0^*(r, \lambda, p) = \frac{1}{4\pi r^2} e^{-(1+p)r} \sum_{n=0}^N B_{2n_0}(\lambda, p) \alpha_n(\lambda, p) \quad (21)$$

Les  $\alpha_n$  sont des combinaisons linéaires de polynômes orthogonaux dits de Spencer et Fano. Regardons le sens physique de (21) que l'on écrit sous la forme :

$$H_0^* = e^{-pr} H_0^{**}(R, \lambda, p). \quad (22)$$

Si l'on connaît l'inverse de  $H_0^{**}$  par exemple  $V(r, \lambda, T)$ , on montre mathématiquement que  $G_0^*$  inverse de  $H_0^*$  est égal à :

$$\text{et } \left. \begin{aligned} G_0^* &= V(r, \lambda, T-r) & \text{si } T \geq r \\ G_0^* &= 0 & \text{si } T < r \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Ceci vérifie le fait physique qu'aucune particule ne peut parvenir à la distance sans dimension  $r$  avant le temps sans dimension  $T = r$ .

Par la suite, on appellera  $V$  le flux « retardé ».

## V.3. RESTITUTION PAR UNE SOMME D'EXPONENTIELLES.

On suppose avoir calculé un nombre  $N_{\max} = 2N$  (nombre pair) de moments  $B_{2m_0}$  et on cherche  $H_0^*$  de la forme :

$$H_0^* = \frac{(1+p)}{4\pi r} \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{C_i} \exp \left[ \frac{(1+p)r}{\sqrt{C_i}} \right] \quad (24)$$

On démontre que les  $A_i$  et  $C_i$  sont solutions du système d'équations de degré  $2N$  :

$$\sum_{i=1}^N A_i C_i^n = B_{2n_0} \quad \text{pour } 0 \leq n \leq 2N-1 \quad (25)$$

Remarquons que comme (22), l'expression (24) peut toujours être écrite  $H_0^* = e^{-pr} H_0^{**}$  (24') et c'est cette quantité  $H_0^{**}$  qui est utilisée dans la suite.

VI - INVERSION DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE  
DU FLUX RETARDÉ

Nous poursuivons notre programme en expliquant comment remonter de  $H(p)$  à  $G(T)$ .

On cherche à présent  $V$  transformée de Laplace inverse de  $H_0^{**}$  qui a été obtenu par l'une des deux méthodes exposées dans les paragraphes IV.2 et IV.3. Or  $H_0^{**}$  n'est connu numériquement, pour des raisons de temps de calcul que pour un nombre limité de valeurs de la variable  $p$ . De plus, même dans l'hypothèse où le temps de calcul est bon marché, il est bien connu en analyse numérique que l'inversion d'une transformée de Laplace connue seulement numériquement est quelque chose de très délicat.

Il est donc préférable de faire une hypothèse a priori sur la forme de  $V(r, \lambda, T)$ . Physiquement on admet que le flux, en fonction du temps, est le produit d'un terme exponentiel par un facteur de renforcement proportionnel au temps ce qui permet de donner à  $V$  la forme :

$$V(r, \lambda, T) = Kb^2 T e^{-bT} \quad (26)$$

Les paramètres  $K$  et  $b$  ne dépendent que de  $r$  et de  $\lambda$ . On en déduit

$$H_0^{**} = \frac{K b^2}{(p + b)^2} \quad (27)$$

Il reste maintenant, pour  $r$  et  $\lambda$  fixés, à déterminer les paramètres  $K$  et  $b$ , ce qui est obtenu en identifiant (27) au  $H_0^{**}$  de (22) ou (24') ces dernières expressions étant elles-mêmes connues pour certaines valeurs de  $p$ .

La valeur  $p = 0$  nous permet d'obtenir  $K = H_0^{**}(0)$ , on retrouve  $K$  valeur du flux sans dimension pour une source stationnaire.

$H_0^{**}$  étant en outre connu pour d'autres valeurs de  $p$ , il est possible d'obtenir  $b$  par la méthode classique des moindres carrés qui donne une équation de la forme  $f(b) = 0$  facile à résoudre itérativement par la méthode de Newton.

## VII - RÉSULTATS OBTENUS

## VII.1. GÉNÉRALITÉS.

On se propose de fournir à présent une série de résultats, directement exploitables par un expérimentateur, ces résultats étant donnés sous forme de courbes, on montrera ensuite sur un exemple comment utiliser les courbes pratiquement.

Considérons une source ponctuelle de Dirac d'énergie 1 MeV

$$(\lambda_0 = 0,51097 \neq 0,511)$$

et on se propose de déterminer les paramètres  $K$  et  $b$  pour différentes valeurs de la variable sans dimension  $r$ . Le domaine de longueurs d'onde  $\lambda$  explorées est  $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0 + 4$ .

Remarquons qu'il est symétrique par rapport à la discontinuité  $\lambda_0 + 2$ , les courbes de  $K$  et  $b$  en fonction de  $\lambda$  seront données sur deux feuilles séparées (4 séries de courbes au total numérotées de 1 à 4).

On a utilisé trois valeurs de la variable symbolique  $p$  ( $p = 0; 0,5; 1$ ), on a calculé six moments  $B_{2m_0}$  avec un pas d'intégration  $h = \frac{1}{100}$ . L'ensemble du calcul y compris celui des paramètres  $K$  et  $b$  a demandé environ 15 minutes, sur un ordinateur puissant de 65 000 mots avec tambour rapide, la programmation ayant été faite en FORTRAN IV.

### VII.2. INTRODUCTION DE L'ATMOSPHERE RÉELLE.

On vient d'obtenir des courbes donnant les variations en fonction de l'énergie des paramètres  $K$  et  $b$  pour différentes valeurs de la variable  $r$ , variable que l'on peut considérer comme représentant des libres parcours moyens. Comment à présent passer de  $r$  sans dimension à  $R$  en cm ?

D'après (11), on a  $r = \eta \rho R$

$\eta$  étant une constante indépendante de l'altitude,

$\rho$  densité du milieu étant obtenu à partir de (7)

on peut tracer dans l'espace, pour différentes altitudes de la source, les courbes que nous pourrions appeler « isolibre-parcours », ce qui a été fait pour les figures 5-6-7. Ces courbes nous donnent pour différentes valeurs de  $r$  les variations de la distance horizontale en fonction de l'altitude.

Voyons à présent comment utiliser les résultats fournis par ces courbes.

### VII.3. EXEMPLE PRATIQUE.

Supposons la source ponctuelle de 1 MeV située au sol et le point  $M$  détecteur à une distance de 2 km de la source et à une distance de 1 km. On utilise les courbes de la figure 5 pour trouver la valeur de  $r$  correspondant à  $R = 2 \cdot 10^5$  cm : à l'intersection du cercle ayant pour centre la source et pour rayon 2 km avec la verticale située à 1 km d'altitude, on trouve  $r = 15$ .

De (11), on déduit  $v\mu_0 = \frac{15}{2 \cdot 10^5} = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$ . Comme  $V = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$ ,  $T$  et  $t$  en secondes sont liés par :

$$T = 3 \cdot 10^{10} \times 7,5 \cdot 10^{-5} t = 2,25 \cdot 10^6 t.$$

Supposons à présent qu'on désire connaître la variation du flux en fonction du temps pour une énergie de 0,2 MeV.

On a  $\lambda = \frac{0,511}{0,2} = 2,555.$

Des figures 2 et 4, on déduit  $K = 6,75 \cdot 10^{-9}$   $b = 0,9$ .

On sait à présent comment passer des grandeurs sans dimension aux grandeurs réelles et on connaît les paramètres  $K$  et  $b$ , il suffit d'appliquer les différentes formules.

On aura  $V$  flux retardé :

$$V = Kb^2 T e^{-bT} = 5,46 \cdot 10^{-9} T e^{-0,9 T}$$

$$G_0^* \text{ flux sans dimension : } G_0^* = V(T - r) \text{ si } T - r \geq 0.$$

D'où  $G_0^* = 5,46 \cdot 10^{-9} (T - 15) e^{-0,9 (T-15)}$  pour  $T \geq 15$

$$I_0^* \text{ flux en MeV/cm}^2/\text{s} : I_0^* = \nu (\nu \mu_0)^3 G_0^* = \\ 1,735 \cdot 10^{-4} (t - 6,67 \cdot 10^{-6}) \exp [-2,02 \cdot 10^{+6} (t - 6,67 \cdot 10^{-6})].$$

On montre en particulier que pour le temps  $t = 7,16 \cdot 10^{-6}$  s, le flux passe par un maximum égal à  $0,316 \cdot 10^{-10}$  MeV/cm<sup>2</sup>/s.

### VIII - PRÉCISION ET LIMITATION DE LA MÉTHODE

Examinons tout d'abord où peuvent se trouver les erreurs dues à l'analyse numérique. La première vient du calcul des moments, c'est l'erreur due à l'intégration par la méthode des trapèzes, elle est difficilement chiffrable, elle augmente avec la longueur du domaine en longueur d'onde et avec le nombre de moments calculés.

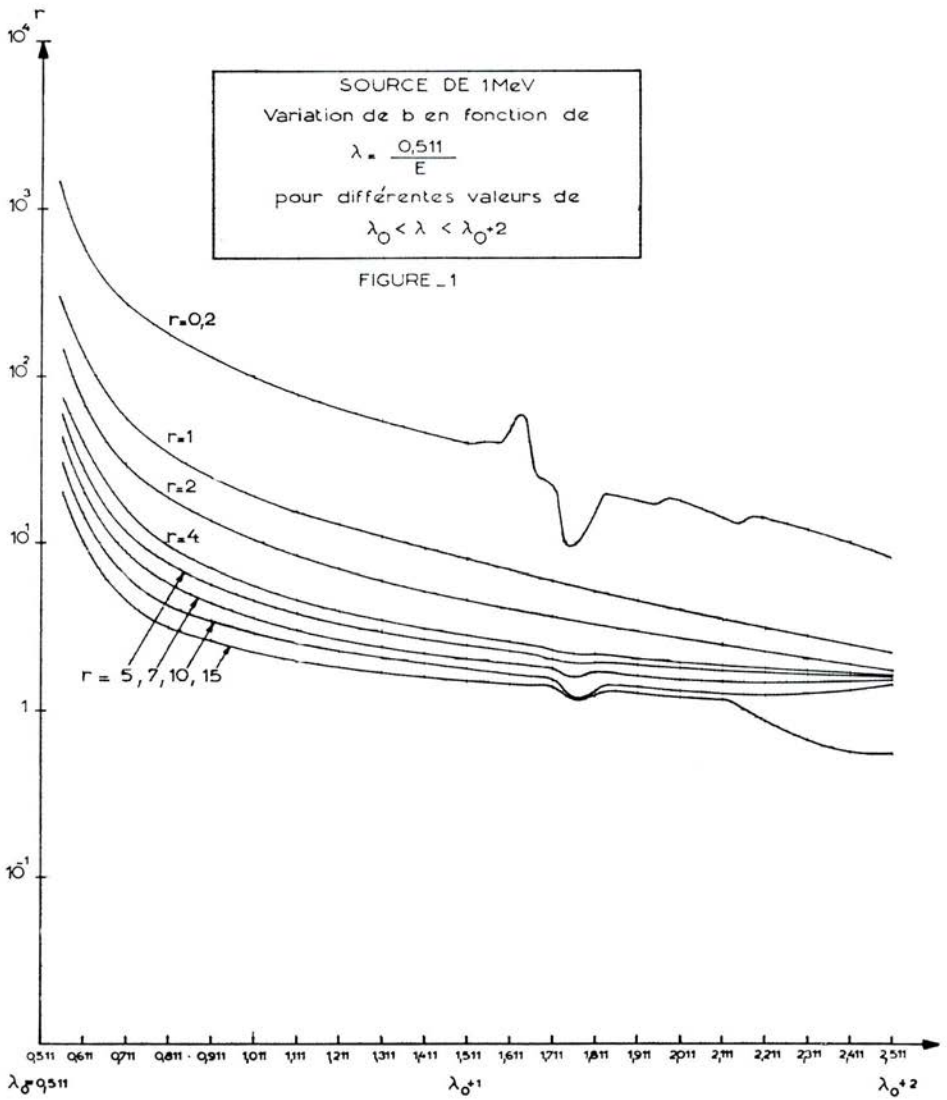
Autre source d'erreur qu'il est aussi peu possible d'estimer, celle introduite par le fait qu'on utilise seulement un nombre limité de moments par la reconstruction du flux; toutefois les hypothèses semblent assez bonnes puisque les deux méthodes donnent pratiquement les mêmes résultats.

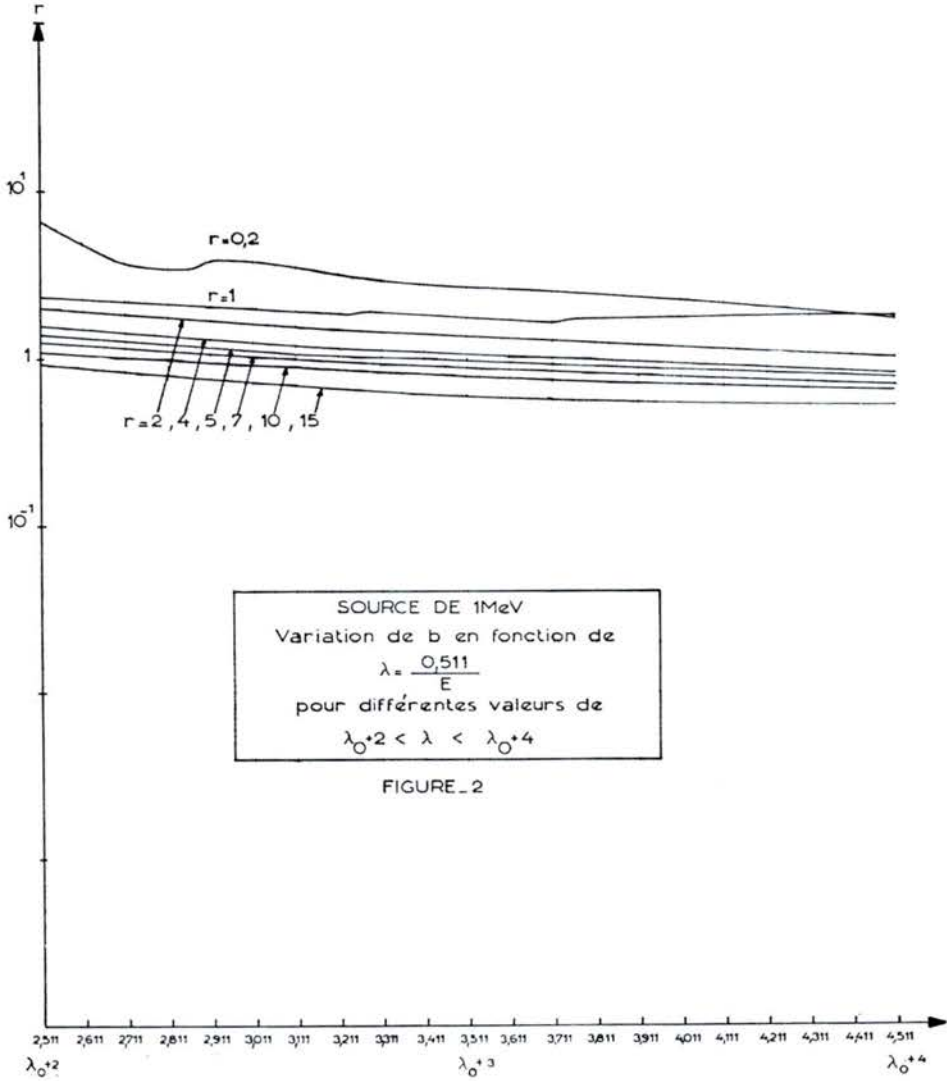
Au cours d'un essai, nous avons utilisé un plus grand nombre de moments 10 au lieu de 6, les résultats étaient identiques au 1/1000 près ce qui prouve que les séries utilisées pour la reconstruction convergent rapidement. Enfin dernière source d'erreur dans le calcul du flux : l'introduction de l'hypothèse de variation en fonction du temps. Si cette hypothèse était pleinement vérifiée, les valeurs du paramètre  $b$  devraient être indépendantes du choix des valeurs de  $p$ . Or, pratiquement, il existe une légère fluctuation (de l'ordre de quelques pourcents) dans les valeurs prises par  $b$  quand on change les  $p$ , ce qui, compte tenu des causes d'erreurs qui viennent d'être indiquées suggèrent la validité de l'hypothèse faite pour le calcul de la transformée inverse de Laplace.

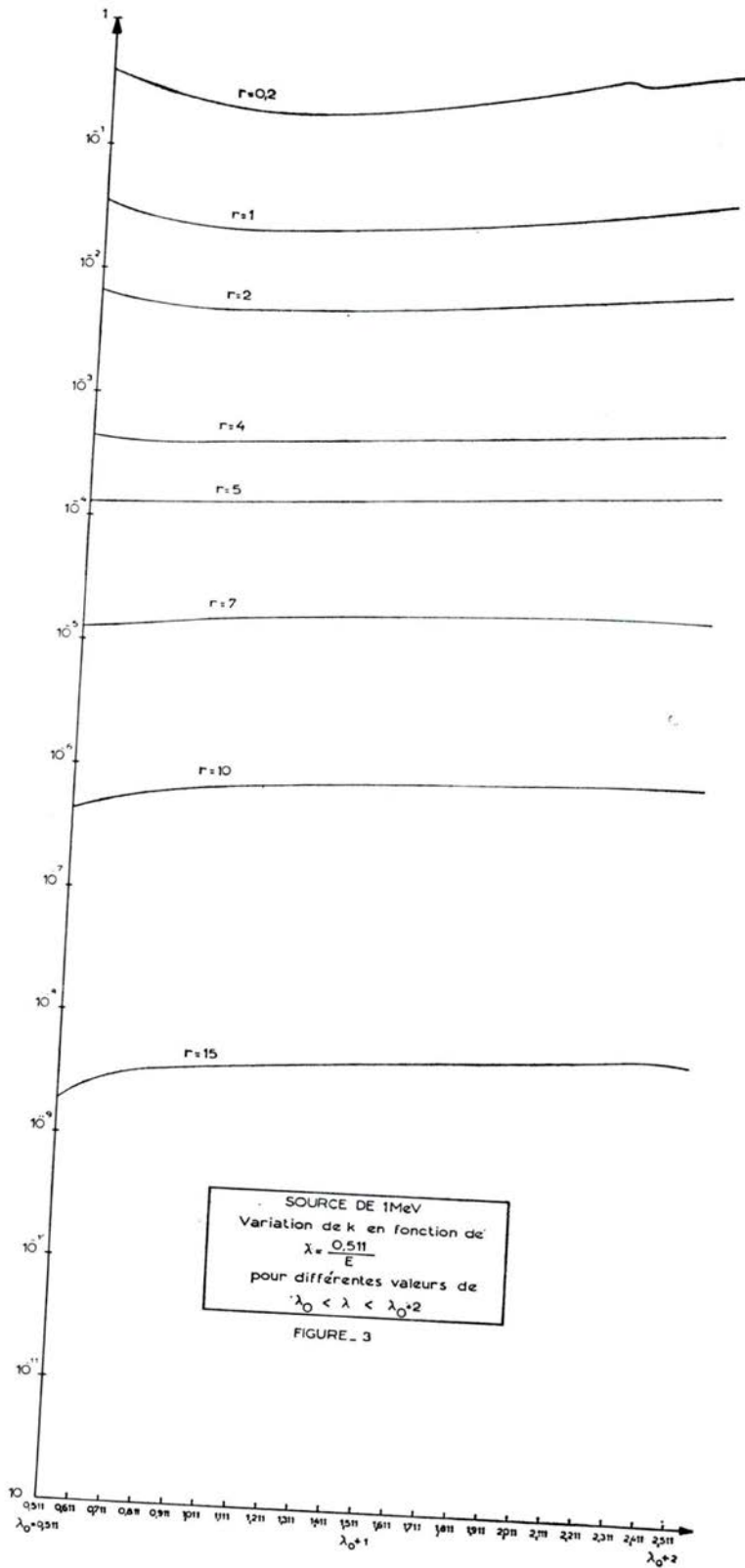
Il a été constaté par divers auteurs que la méthode n'est plus valable pour le cas stationnaire au-delà de 20 libres parcours, la reconstruction pouvant fournir des flux négatifs. Dans notre cas, nous avons commencé à obtenir quelques résultats litigieux pour 15 libres parcours, la méthode appliquée à la source de Dirac est donc valable jusqu'à des distances un peu moins élevées que pour le cas stationnaire. Essayons d'expliquer pourquoi.

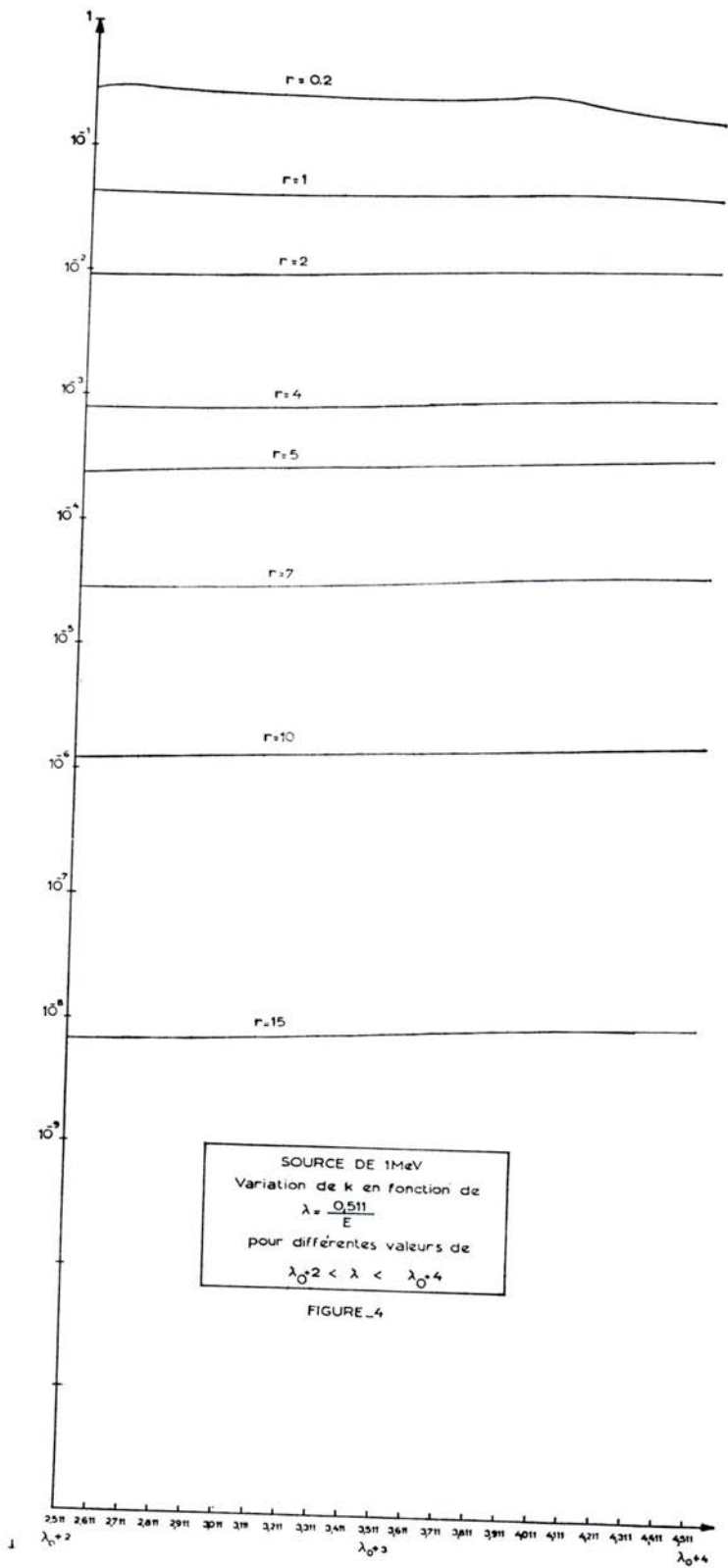
Dans le cas stationnaire, la reconstruction se fait avec des fonctions en  $e^{-r}$  et dans notre cas en  $e^{-(1+p)r}$ , ce qui revient grossièrement à dire qu'à 20 libres parcours moyens du cas stationnaire correspondent seulement  $\frac{20}{1+p}$  libres parcours pour le cas de Dirac.

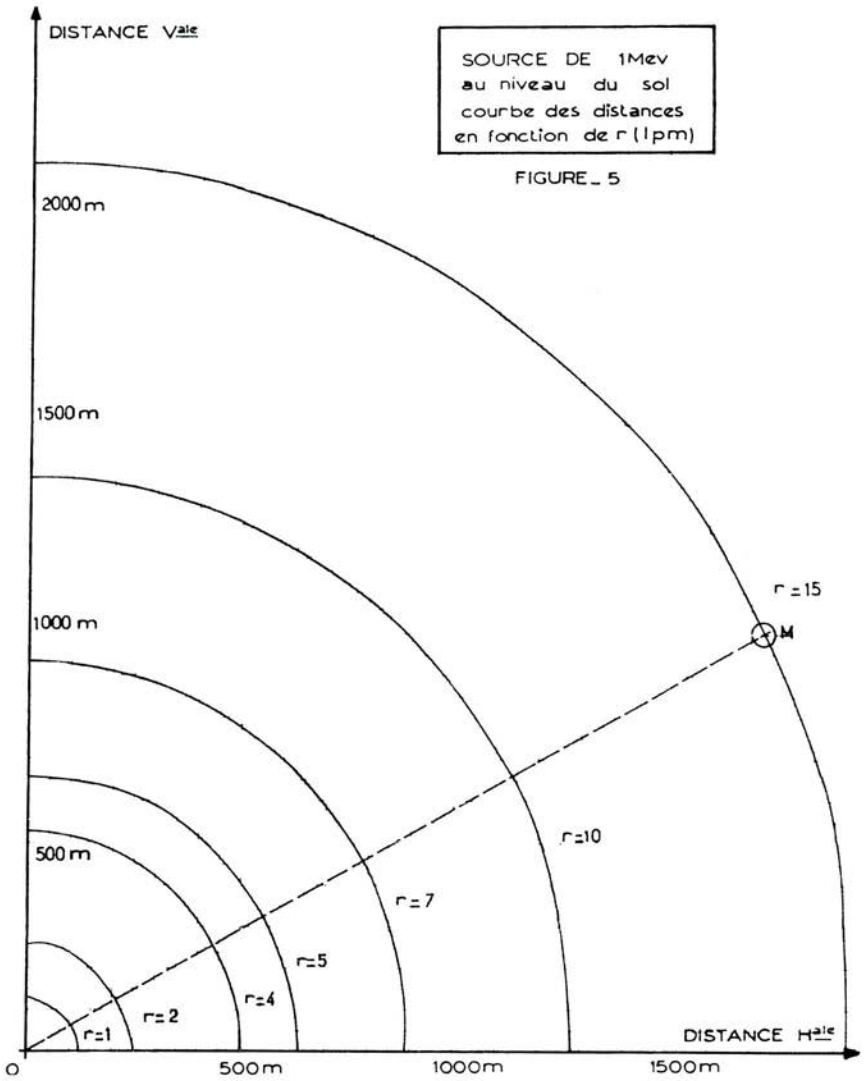
Il sera prudent, si on désire « approcher » de grandes distances, d'utiliser des valeurs petites pour la variable symbolique  $p$ .

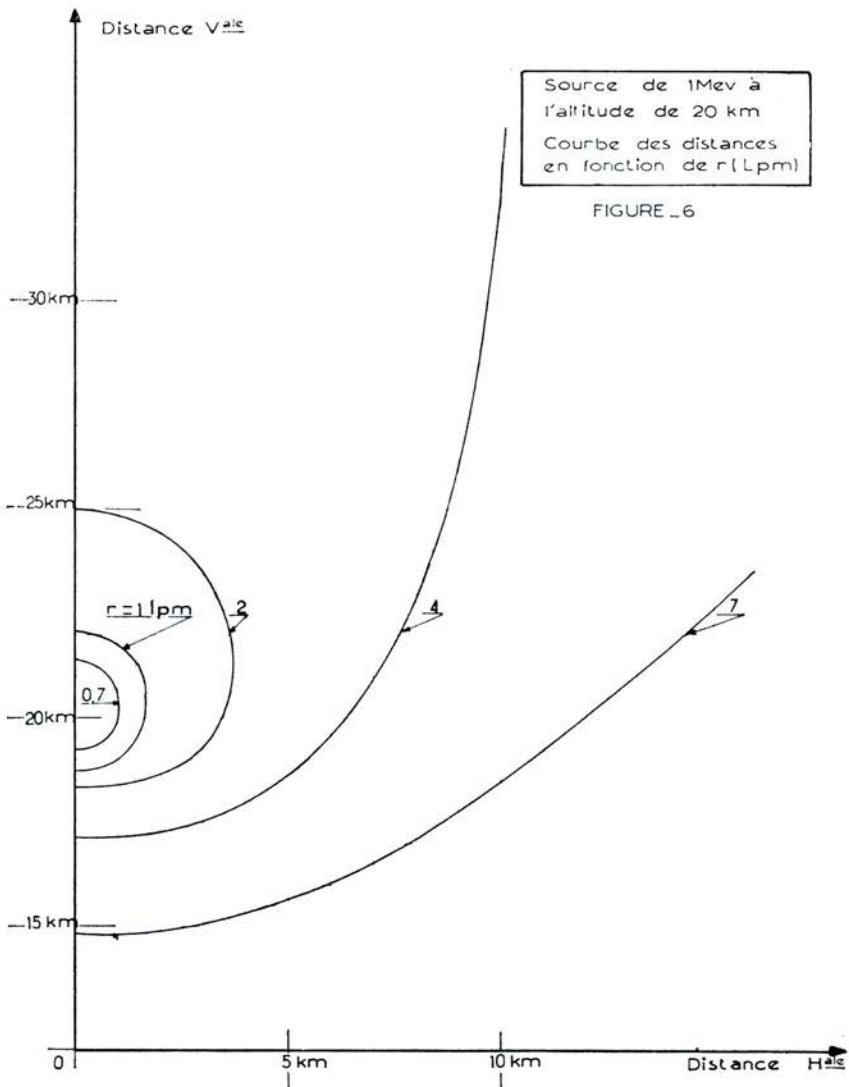


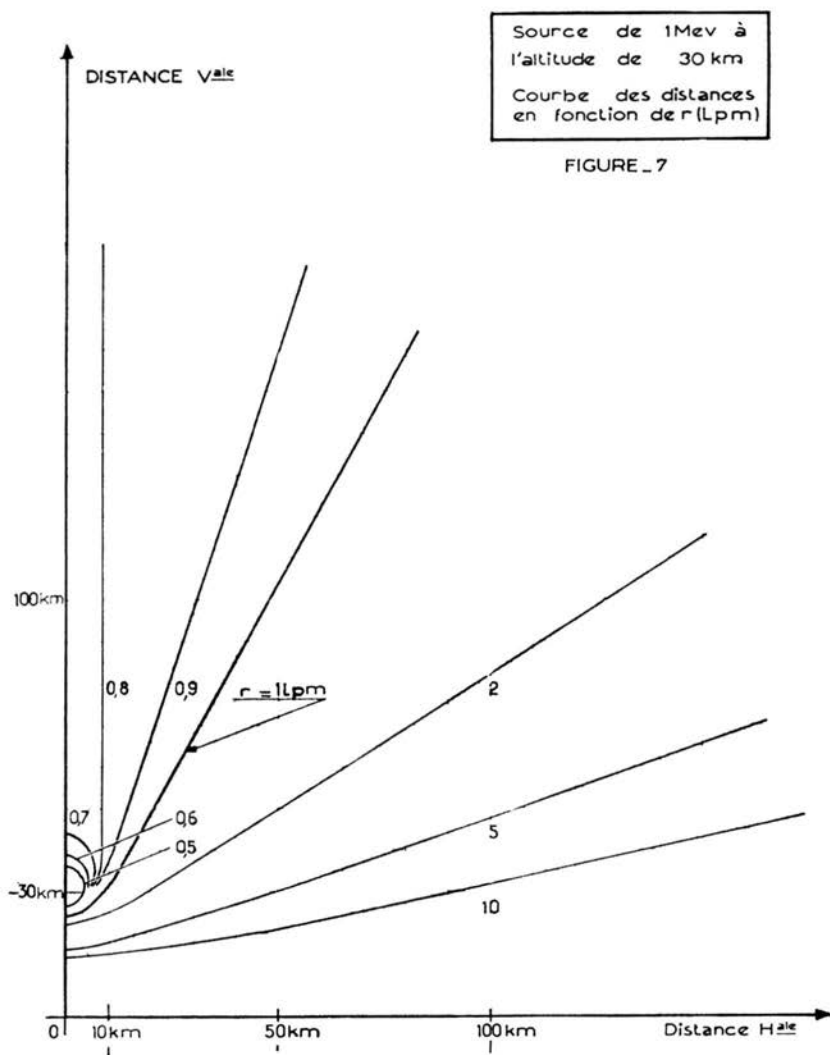












## IX - CONCLUSION

Nous venons de voir la précision et les limitations de la méthode. Dans les cas où elle est valable, elle s'avère très puissante car le calcul le plus long, celui des moments, est fait une fois pour toutes pour une source d'énergie donnée, les résultats étant stockés sur bande magnétique. A partir de cette bande, on peut non seulement calculer le flux  $I_0$  pour une source plane ou le flux  $I_0^*$  pour une source ponctuelle, mais aussi évaluer d'autres quantités comme le taux de dose, tous ces résultats sont alors obtenus en un temps très minime. De plus, si pour une source au voisinage du sol, on est limité à des distances de l'ordre de 2 km, il suffit de consulter les figures 5 et 6 pour constater que ce n'est plus le cas pour des sources dont l'altitude est plus élevée et que dans ce cas des distances correspondant à  $r = 15$  ne seront jamais à considérer pratiquement.

Nous envisageons d'étendre la méthode des moments aux neutrons se propageant en atmosphère réelle et subissant les interactions suivantes : absorption, diffusion élastique non isotrope, diffusion inélastique isotrope.

Cette méthode des moments a été introduite pour le cas stationnaire par Spencer et Fano, toutefois, les articles de base que nous avons utilisés sont les rapports NYO 3075 de GOLDSTEIN et WILKINS et NYO 6270 de CERTAINE. Nous exposons tous les détails mathématiques dans les divers rapports du L.C.A. (Etudes LCA n° 07.1 : Notes n° 2, 14, 20, 63).

Il pourrait par la suite être envisagé une extension de la méthode aux très grandes distances ( $r$  pouvant varier jusqu'à 80 ou 100 livres parcourus) par une méthode semi-asymptotique; nous avons déjà traité le cas stationnaire, cette extension avait fait l'objet d'une communication au dernier Congrès de l'AFIRO (voir également l'Etude L.C.A. n° 07.1 : Note n° 52).