

## APPLICATIONS DE LA MÉTHODE DE TIHOV A LA SPECTROMÉTRIE DES NEUTRONS INTERMÉDIAIRES AU MOYEN DU DÉTECTEUR POLYSPHÈRE

M. BUXEROLLE et J. LAMBÉRIEUX \*

### I - INTRODUCTION ET GÉNÉRALITÉS

On sait que le détecteur polysphère se compose d'un détecteur de neutrons lents placé successivement au centre d'une série de sphères de polythène.

Dans un flux de  $\tau$  neutron par  $\text{cm}^2$ , de léthargie  $x$ , ce détecteur donne une réponse, qui dépend à la fois du rayon  $y$  de la sphère et de la léthargie  $x$ .

Nous désignons cette réponse par  $\sigma(x, y)$ .

Dans un flux  $\zeta(x)$  qui s'étend de la léthargie  $a$  jusqu'à la léthargie  $b$ , ce détecteur placé dans la sphère du rayon  $y$  donne la réponse globale :

$$f(y) = \int_a^b \sigma(x, y) \cdot \zeta(x) \cdot dx. \quad (1)$$

Pour simplifier l'écriture, on a coutume d'utiliser la notation condensée suivante :

— l'opération  $\int_a^b \sigma(x, y) dx$  appliquée à une fonction de  $x$  est notée  $T$ .

— l'opération  $\int_c^d \sigma(x, y) dy$  appliquée à une fonction de  $y$  est notée  $T^*$ .

( $c$  et  $d$  sont les rayons minima et maxima des sphères utilisées).

Avec cette notation l'équation intégrale (1) s'écrit :

$$f = T\zeta. \quad (2)$$

Remarquons que dans (1) ou (2), l'observation  $f$  est une fonction de  $y$ . On peut donc appliquer l'opérateur  $T^*$  aux 2 membres de l'équation (1) ou (2), qui prend la forme rigoureusement équivalente :

$$\boxed{T^* f = T^* T\zeta} \quad (3)$$

(\*) Service de Protection contre les radiations, Centre d'Etudes Nucléaires de Caradache, BP n° 1, St-Paul-lès-Durance - 13.

Le problème qui se pose constamment dans la pratique de la radioprotection est de connaître le flux  $\chi(x)$  à partir des observations  $f(y)$ .

Ce problème revient en principe à résoudre les équations (1) (2) ou (3).

Or, on sait qu'un tel problème appartient à la catégorie des problèmes dits *mal posés* :

Il a, en pratique, une infinité de solutions. Ceci tient fondamentalement au fait que les opérateurs  $T$ ,  $T^*$  ou  $TT^*$  ne sont pas bornés inférieurement, ce qui correspond physiquement au fait que les réponses  $\sigma$  du détecteur polysphère n'ont pas de seuil et sont continues.

Le mathématicien soviétique TIHONOV a trouvé une méthode permettant précisément de poser ce problème correctement.

Le problème une fois posé correctement, le reste n'est plus qu'une question de développements mathématiques, assez complexes d'ailleurs, et sur lesquels nous ne nous arrêterons pas.

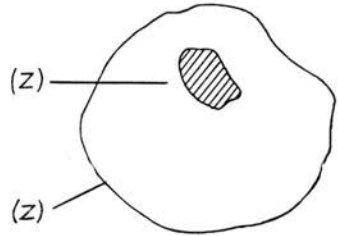
## II - PRINCIPE DE LA MÉTHODE DE TIHONOV [1]

Toutes les solutions possibles des équations précédentes constituent un ensemble  $(Z)$  de fonctions  $\chi(x)$ , qui, en général, n'ont aucun sens physique.

Mais il est clair que les solutions physiques, qui nous intéressent, sont contenues dans cet ensemble : *Elles constituent un sous-ensemble  $(\bar{Z})$  de l'ensemble  $(Z)$ .*

Il est donc nécessaire d'ajouter à l'équation (3), par exemple, une *contrainte* convenablement choisie pour obliger la solution à se trouver dans le sous-ensemble  $(\bar{Z})$ .

Pour cela il faut évidemment pouvoir caractériser les fonctions de ce sous-ensemble d'une manière qui puisse s'écrire au moyen du langage mathématique.



### II-1. DÉFINITION DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS ADMISSIBLES

Considérons un ensemble infini de fonction  $\chi(x)$  satisfaisant dans l'intervalle  $(a, b)$  aux conditions suivantes (réf. 2) :

1) elles sont *bornées* en valeur absolue  $|\chi(x)| < k$ .

2) elles sont *équicontinues* dans (l'intervalle  $(a, b)$ ), ce qui signifie : qu'à tout nombre  $\varepsilon$  positif si petit soit-il, on peut faire correspondre un nombre positif  $\eta$ , tel que l'inégalité :

$$|x' - x''| < \eta$$

entraîne l'inégalité :

$$|\chi(x') - \chi(x'')| < \varepsilon.$$

Le nombre  $\eta$  étant le même pour toutes les fonctions de l'ensemble  $(\bar{Z})$ .

On peut démontrer qu'étant donnée la suite infinie

$$z_1 z_2 \dots z_n \dots$$

de toutes les fonctions d'un tel ensemble, si on isole de manière quelconque de cette séquence, une sous-séquence également infinie  $z_{n,k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) (en rayant des termes suivant une loi arbitrairement choisie), cette sous-séquence converge uniformément vers une limite  $z_{n_0}$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

Les fonctions jouissant de ces propriétés sont dites former une *classe compacte vis-à-vis de la convergence uniforme*.

On définit de manière analogue des fonctions formant une *classe compacte vis-à-vis de la convergence en moyenne*.

Avec TICHONOV nous postulerons que les fonctions  $\bar{z}(x)$ , qui ont un sens physique pour notre problème, constituent une *classe compacte vis-à-vis de la convergence en moyenne*.

## II-2. CRITÈRE DE COMPACTITÉ

On démontre (voir MIKHLIN - *Variational methods in mathematical physics*, pages 239 à 242) que si l'on considère l'opérateur différentiel du 2<sup>e</sup> ordre :

$$\begin{aligned} S\bar{z} &= -\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d\bar{z}}{dx} \right] + r(x) \cdot \bar{z} \\ \left( \frac{d\bar{z}}{dx} \right)_a &= 0 \\ \bar{z}(b) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

où  $p(x)$  et  $r(x)$  sont essentiellement  $\geq 0$ , et si on lui impose la condition :

$$(S\bar{z}, \bar{z}) = \int_a^b (S\bar{z}) \cdot \bar{z} \, dx < C^2 \quad (5)$$

( $C$  étant une constante) toutes les fonctions  $\bar{z}$  qui satisfont à cette condition, constituent précisément une *classe compacte vis-à-vis de la convergence en moyenne*.

L'opérateur  $S$  est construit à l'aide de la fonction de GREEN pour le problème aux conditions limites défini par (4). Ce calcul est expliqué dans la référence [4].

## III - FORMULATION

Selon les principes posés au chapitre II, on est donc amené à résoudre :

- le problème posé :  $T\bar{z} = f$  (c'est-à-dire  $\|T\bar{z} - f\|^2$  minimum),
- avec la contrainte :  $(S\bar{z}, \bar{z}) < C^2$ ,

ce qui se ramène à la condition unique :

$$\boxed{\|T\zeta - f\|_y^2 + \alpha (S\zeta, \zeta)_x} \quad \text{minimum} \quad (6)$$

$\alpha$  est un nombre positif petit appelé multiplicateur de LAGRANGE. Les indices  $y$  et  $x$  dans la fonctionnelle (6) indiquent la variable par rapport à laquelle est calculée la norme, ou le produit intérieur.

La fonctionnelle (6) peut se développer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} I &= (T\zeta - f, T\zeta - f)_y + \alpha (S\zeta, \zeta)_x \\ &= (T\zeta, T\zeta)_y - 2(f, T\zeta)_y + \|f\|_y^2 + \alpha (S\zeta, \zeta)_x \\ &= (\zeta, T^*T\zeta)_x - 2(T^*f, \zeta)_x + \|f\|_y^2 + \alpha \int_a^b p(x) \cdot \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 dx + \\ &\quad + \alpha \int_a^b r(x) \cdot \zeta^2(x) \cdot dx. \end{aligned}$$

Le problème consistant à rechercher une fonction  $\zeta$ , qui minimise deux fonctionnelles différent par un terme constant  $\|f\|_y^2$  est évidemment le même, si bien que le Lagrangien quadratique de la fonctionnelle  $I$  peut s'écrire :

$$L = \zeta \cdot T^*T\zeta - 2 \zeta(n)(x) \cdot T^*f + \alpha \cdot p(x) \cdot \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \alpha \cdot r(x) \cdot \zeta^2(x).$$

On exprime que  $I$  est minimale par application de l'équation d'EULER-LAGRANGE :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \zeta} = 0$$

ce qui donne immédiatement l'équation du problème stabilisé :

$$\boxed{T^*T\zeta + \alpha \cdot S\zeta = T^*f} \quad (7)$$

Evidemment la solution de (7), bien qu'appartenant à une classe compacte, n'est pas solution de (3). Pour le rappeler nous désignerons sa solution par  $\zeta_\alpha$  et nous écrivons (7) :

$$\boxed{T^*T\zeta_\alpha + \alpha \cdot S\zeta_\alpha = T^*f} \quad (8)$$

Néanmoins quand  $\alpha \rightarrow 0$ , l'équation (8) tend à devenir identique à l'équation (3) et TIHOVON démontre le résultat remarquable suivant :

Quand  $\alpha \rightarrow 0$ , la solution de  $\zeta_\alpha$  de l'équation (8) tend vers la solution  $\bar{\zeta}$  de l'équation (3) et cette convergence est uniforme.

En d'autres termes :

$$\alpha \rightarrow 0$$

entraîne :

$$| z_\alpha - \bar{z} | < \varepsilon.$$

*Remarque.* — Dans tout ce qui précède on a supposé que les observations  $f$  n'étaient pas entachées d'erreurs. En pratique elles sont entachées d'une erreur  $\delta f$ . Ceci a pour conséquence que l'équation (8) ne peut être résolue que pour une valeur de  $\alpha$  supérieure à un minimum  $\alpha_0$ , que l'on calcule par la méthode indiquée dans l'annexe (I).

### III - APPLICATION AU DÉTECTEUR POLYSPHÈRE

Nous avons appliqué la formule (8) au moyen d'un programme test, à une série d'expériences effectuées avec le détecteur polysphère.

Les détails de ces expériences, les résultats de mesure et les spectres obtenus par le programme test sont consignés dans le rapport (3).

Ces résultats montrent que la méthode est prometteuse. Cependant dans son état actuel le programme test est très incomplet pour deux raisons :

1° La détermination automatique du paramètre  $\alpha$  en fonction de l'écart  $\| \delta f \|$  des mesures n'est pas encore au point : on cherche  $\alpha$  par des tâtonnements successifs qui obligent à repasser le calcul plusieurs fois, ce qui est long et fastidieux.

2° Le calcul de la répercussion des écarts de mesure n'est pas encore programmé.

Les annexes I et II constituent un essai des auteurs visant à préciser ces deux points. Elles indiquent la direction actuelle de leur étude.

### ANNEXE I

#### DÉTERMINATION DU PARAMÈTRE $\alpha$

La solution de classe compacte  $\bar{z}$  de l'équation :

$$T^*T\bar{z} = T^*f$$

n'est pas solution de (8). Donc d'après l'inégalité (6) et, compte tenu de l'inégalité  $(S\bar{z}, \bar{z}) < C^2$ .

$$\| Tz_\alpha - f \|^2 + \alpha \cdot (Sz_\alpha, z_\alpha) < \| T\bar{z} - f \|^2 + \alpha (S\bar{z}, \bar{z}) = \alpha C^2.$$

Mais  $\alpha$  étant choisi essentiellement  $> 0$  et  $S$  était un opérateur positif défini,  $\alpha (Sz_\alpha, z_\alpha)$  est essentiellement  $> 0$ .

Donc :

$$\| Tz_\alpha - f \|^2 < \alpha \cdot C^2$$

$Tz_\alpha$  n'est autre que l'observable recalculé à partir de la solution  $z_\alpha$ .

Mais si la quantité  $f$  est *donnée a priori*, comme c'est toujours le cas lorsqu'elle est fournie par une expérience (donc entachée d'erreurs), il est évident qu'il est en principe impossible, à la fois pour des raisons de convergence et de stabilité numérique, d'annuler la norme  $\|T_{\alpha} z - f\|$ , donc de satisfaire à l'inégalité (9) pour  $\alpha$  infiniment petit.

En d'autres termes, si on résout l'équation intégrodifférentielle (8) avec des  $\alpha$  décroissants, on constate qu'au-dessous d'une valeur minimale  $\alpha_0$  l'inégalité (9) cesse d'être vraie. Dans ces conditions, l'instabilité du problème réapparaît puisque, les inégalités se trouvant renversées, la condition (5) qui garantit la stabilité, n'est plus sûrement satisfaite.

En pratique, on donnera donc à la machine une table de  $\alpha$  décroissants et on lui demandera de résoudre pour chacun d'eux l'équation intégrodifférentielle (8), puis de vérifier l'inégalité (9).

On travaillera finalement avec la valeur minimale  $\alpha_0$  vérifiant (9).

La constante  $C$ , qu'il faut connaître pour effectuer ces calculs préliminaires, peut être fixée de la manière suivante :

On a vu plus haut l'expression développée de la quantité  $(S_{\alpha} z)$  :

$$(S_{\alpha} z) = \int_a^b p(x) \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 dx + \int_a^b r(x) z^2(x) dx.$$

Le rapport  $\frac{(S_{\alpha} z, z)}{\|z\|^2}$  qui est le rapport de la norme de  $z$  dans la métrique de l'opérateur  $S$  à la norme ordinaire de  $z$ , est en quelque sorte une mesure de la « régularité » de la fonction : plus ce rapport est petit et plus la fonction  $z$  est « adoucie ».

Il est évident physiquement que le calcul ne peut en aucun cas nous fournir des solutions  $\bar{z}$  *moins régulières que l'observation f elle-même*.

Ce qui revient à dire que les solutions  $\bar{z}$ , que nous pouvons trouver sont « adoucies » par le pouvoir de résolution limité de l'instrument de mesure.

Nous poserons donc :

$$\max \frac{(S_{\alpha} \bar{z}, \bar{z})}{\|\bar{z}\|^2} = \frac{C^2}{\|\bar{z}\|^2} = \frac{(Sf, f)}{\|f\|^2}.$$

Soit :

$$C^2 = \frac{\|\bar{z}\|^2}{\|f\|^2} \cdot (Sf, f)$$

$$\frac{1}{C^2} = \frac{\|f\|^2}{\|\bar{z}\|^2} \cdot \frac{1}{(Sf, f)}. \quad (11)$$

Limite supérieure du rapport  $\frac{\|f\|}{\|\bar{z}\|}$ .

Il est facile d'obtenir une limite supérieure de ce rapport. On a en effet :

$$f = T_{\alpha} z.$$

Donc :

$$(f, f) = \|f\|^2 = (T\bar{z}, f) = (T\bar{z}, Tz) = (\bar{z}, T^*Tz).$$

Donc, d'après l'inégalité de CAUCHY :

$$\|f\|^2 \leq \|z\| \cdot \|T^*Tz\| = \|z\| \cdot \|T^*f\|.$$

On a donc :

$$\boxed{\frac{\|f\|}{\|z\|} \leq \frac{\|T^*f\|}{\|f\|} = \omega} \quad (12)$$

et d'après (11) :

$$\frac{1}{C^2} \leq \frac{\omega^2}{(Sf, f)}$$

Cette relation permet d'estimer l'ordre de grandeur de la constante  $C$ , ce qui est suffisant pour le calcul de  $\alpha_0$ .

## ANNEXE II

### RÉPERCUSSION DE L'ERREUR D'OBSERVATION

Désignons par :

$\varepsilon$  : l'écart de  $\bar{z}$  correspondant à un écart  $\rho$  de l'observation  $f$

$\varepsilon_\alpha$  : l'écart correspondant de la solution approchée  $z_\alpha$ .

Nous admettons pour simplifier :  $\varepsilon \simeq \varepsilon_\alpha$  ce qui est parfaitement raisonnable en raison de la proximité de  $\bar{z}$  et  $z_\alpha$ .

Il nous reste donc à calculer  $\varepsilon_\alpha$  en fonction de  $\rho$ .

L'équation (8) appliquée à  $\varepsilon_\alpha$  s'écrit :

$$T^*T\varepsilon_\alpha + \alpha S\varepsilon_\alpha = T^*\rho = M\varepsilon_\alpha$$

$M$  désigne l'opérateur  $(T^*T + \alpha S)$ .

En appelant respectivement  $u$  et  $\mu$  les fonctions propres et les valeurs propres de  $M$  nous avons simultanément :

$$M\varepsilon_\alpha = T^*\rho \quad (14)$$

$$Mu = \mu u \quad (15)$$

d'où :

$$(M\varepsilon_\alpha, u) = (T^*\rho, u) = (\rho, Tu)$$

$$(Mu, \varepsilon_\alpha) = (\rho, Tu)$$

$$\mu (u, \varepsilon_\alpha) = (\rho, Tu)$$

Décomposons  $\varepsilon_\alpha$  en série de FOURIER par rapport aux fonctions propres de  $M$ , qui constituent évidemment un système orthonormal puisque  $M$  est un opérateur symétrique positif défini et borné inférieurement :

$$\varepsilon_\alpha = \sum_1^{\infty} (\mu_i, \varepsilon_\alpha) \cdot \mu_i = \sum_1^{\infty} \frac{(\rho, T\mu_i)}{\mu_i} \cdot \mu_i.$$

$$\|\varepsilon_\alpha\|^2 = \sum_1^{\infty} \frac{(\rho, T\mu_i)^2}{\mu_i^2}.$$

L'inégalité de GAUCHY donne :

$$\|\varepsilon_\alpha\|^2 \leq \|\rho\|^2 \cdot \sum \frac{\|T\mu_i\|^2}{\mu_i^2}. \quad (16)$$

Calcul de  $\|T\mu\|$ .

L'équation (15) s'écrit :

$$T^*T\mu + \alpha \cdot S\mu = \mu \cdot \mu$$

$$(T^*T\mu, \mu) + \alpha \cdot (S\mu, \mu) = \mu \|\mu\|^2 = \mu$$

$$\|T\mu\|^2 = \mu - \alpha (S\mu, \mu).$$

Si on désigne par  $\lambda_1$  la plus petite valeur propre de  $S$  on sait que :

$$(S\mu, \mu) \geq \lambda_1 \|\mu\|^2 = \lambda_1 \text{ quelle que soit } \mu.$$

Donc :

$$\|T\mu\|^2 \leq \mu - \alpha \lambda_1.$$

En reportant cette inégalité dans (16) :

$$\|\varepsilon\|^2 \leq \|\rho\|^2 \cdot \sum \frac{\mu_i - \alpha \lambda_1}{\mu_i^2} = \|\rho\|^2 \cdot \sum \left( \frac{1}{\mu_i} - \alpha \frac{\lambda_1}{\mu_i^2} \right).$$

Mais les sommes  $\sum \frac{1}{\mu_i}$  et  $\sum \frac{1}{\mu_i^2}$  sont respectivement les traces des matrices des opérateurs  $M^{-1}$  et  $M^{-1} \cdot M^{-1} = M^{-2}$ .

Nous désignerons ces traces par  $t_{M^{-1}}$  et  $t_{M^{-2}}$  :

$$\|\varepsilon_\alpha\|^2 \leq \|\rho\|^2 (t_{M^{-1}} - \alpha \lambda_1 t_{M^{-2}})$$

$$\|\varepsilon_\alpha\| \leq \|\rho\| \cdot \sqrt{t_{M^{-1}} - \alpha \lambda_1 t_{M^{-2}}}.$$

Enfin, en introduisant l'erreur relative :

$$\eta = \frac{\|\rho\|}{\|f\|}$$

et en posant l'erreur relative sur  $\varepsilon$  :

$$\xi = \frac{\|\varepsilon_\alpha\|}{\|\varepsilon_\alpha\|}$$

$$\xi \leq \eta \cdot \frac{\|f\|}{\|\varepsilon_\alpha\|} \cdot \sqrt{t_{M^{-1}} - \alpha \cdot \lambda_1 t_{M^{-2}}}.$$



Finalement en tenant compte de (12) et en assimilant  $\|z\|$  à  $\|z\alpha\|$

$$\xi \leq \eta \cdot \omega \cdot \sqrt{t_{M-1} - \alpha \cdot \lambda_1 t_{M-2}} \quad (17)$$

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- (1) A.N. TICHONOV. *Soviet mathematics Doklady*. Academic of sciences of the U.R.S.S., tome 151 (1963), pages 510 et suivantes.
- (2) V.I. SMIRNOV. *A course of higher mathematics*. Volume IV, page 53 et 121.
- (3) M. BUXEROLLE, J. LAMBERIEUX. *Premier essai du dosimètre de neutrons intermédiaires*. Groupe de travail « Dosimétrie de Neutrons », Mars 1967.
- (4) M. BUXEROLLE, J. LAMBERIEUX. *Calcul de la fonction de Green pour l'opérateur de Tichonov*. Rapport SPR/RRD - Cadarache.